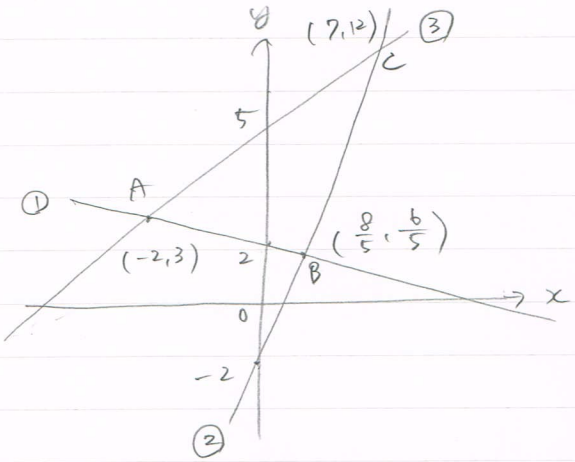
Ⅱ・(Ⅳ)

$$\begin{cases} x+2y-4=0 & \cdots ① \\ 2x-y-2=0 & \cdots ② \\ x-y+5=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$y=-\frac{1}{2}x+2$

$y=2x-2$

$y=x+5$



3直線の交点を求める。
三角形の頂点を図のようにA,B,Cとすると、

①と③から　A$(-2,3)$
①と②から　B$\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$
②と③から　C$(7,12)$

(1) 求める点を(x,y)とすると、各頂点からの距離の2乗和は

$$(x+2)^2+(y-3)^2+\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2+(x-7)^2+(y-12)^2$$
$$=x^2+4x+4+y^2-6y+9+x^2-\frac{16}{5}x+\frac{64}{25}+y^2-\frac{12}{5}y+\frac{36}{25}$$
$$+x^2-14x+49+y^2-24y+144$$
$$=3x^2-\frac{66}{5}x+3y^2-\frac{162}{5}y+210$$
$$=3\left(x^2-\frac{22}{5}x\right)+3\left(y^2-\frac{54}{5}y\right)+210$$
$$=3\left(x-\frac{11}{5}\right)^2+3\left(y-\frac{27}{5}\right)^2+(\text{数字})$$

この式が最小になるのは $(x,y)=\left(\frac{11}{5},\frac{27}{5}\right)$ のとき。

(2) 各辺の垂直二等分線の交点を求めれば良い。

ACの中点：$\left(\frac{-2+7}{2},\frac{3+12}{2}\right)$ より $\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right)$

ABの中点：$\left(\frac{-2+\frac{8}{5}}{2},\frac{3+\frac{6}{5}}{2}\right)$ より $\left(-\frac{1}{5},\frac{21}{10}\right)$

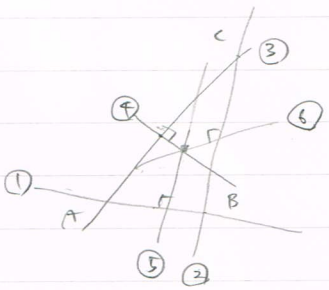
BCの中点：$\left(\frac{\frac{8}{5}+7}{2},\frac{\frac{6}{5}+12}{2}\right)$ より $\left(\frac{43}{10},\frac{33}{5}\right)$

II つづき (IV)

よって ACの垂直二等分線は

$y = -\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{15}{2}$

$y = -x + 10 \quad \cdots ④$ $\quad (③ \perp ④)$



ABの垂直二等分線は

$y = 2\left(x + \frac{1}{5}\right) + \frac{21}{10}$

$y = 2x + \frac{25}{10} \quad \cdots ⑤$ $\quad (① \perp ⑤)$

BCの垂直二等分線は

$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{43}{10}\right) + \frac{33}{5}$

$= -\frac{1}{2}x + \frac{35}{4} \quad \cdots ⑥$ $\quad (② \perp ⑥)$

④と⑥の交点は

$-x + 10 = -\frac{1}{2}x + \frac{35}{4}$

$\frac{1}{2}x = \frac{5}{4}$

$x = \frac{5}{2}$

$y = -\frac{5}{2} + 10 = \frac{15}{2}$

これを⑤に代入すると

(左辺) $= y = \frac{15}{2}$

(右辺) $= 2x + \frac{25}{10}$

$= 2 \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{10} = \frac{15}{2}$

よって (左辺) = (右辺) となり 適している。

以上から 求める点は $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$