

3) (1) さいころを投げたときのそれぞれの結果は以下の通り

小	大	1	2	3	4	5	6
1		$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2			$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3				$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4					$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5						$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6							$\frac{1}{36}$

← 3枚裏返す

← 4枚裏返す

上表より1回目の操作後の硬貨が表向きである確率は $1 - (\frac{1}{36} + \frac{1}{18} \times 1) = \frac{13}{36}$ (3)

2回目の操作後に3の硬貨が表であるのは、1回目2回目の操作ともに裏返すが、ともに裏返さない時なので $\frac{13}{36} \times \frac{13}{36} + \frac{23}{36} \times \frac{23}{36} = \frac{698}{36^2} = \frac{349}{648}$ (4)

1回の操作で 3, 4 の両方裏返すのは $\frac{1}{18} \times 2 = \frac{1}{9}$

3 のみ裏返すのは $\frac{1}{18} \times 2 + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

4 のみ裏返すのは $\frac{1}{18} \times 2 + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

3, 4 と5とも裏返さないのは $1 - (\frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36}) = \frac{2}{9}$

求める確率は全事象から 3, 4 のどちらも裏である事象を除いたものであるので

$$1 - (\frac{5}{36} \times \frac{5}{36} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \times 2) = 1 - \frac{169}{648} = \frac{479}{648} \quad (5)$$

2) r_n - ともに表でもともに裏でもない確率とする

$$p_{n+1} = \frac{2}{9}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{5}{36}r_n \quad (1)$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{9}q_n + \frac{5}{36}r_n \quad (2)$$

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad (3)$$

① - ② より

$$p_{n+1} - q_{n+1} = -\frac{5}{18}(p_n - q_n) \quad x=0 \quad (4)$$

① + ②, ③ より

$$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{13}{18}(p_n + q_n) + \frac{5}{18}r_n \quad (5)$$

$$= \frac{4}{9}(p_n + q_n) + \frac{5}{18}r_n$$

$$\text{④ より } p_n - q_n = \left(-\frac{5}{18}\right)^{n-1}(p_1 - q_1) = \left(-\frac{5}{18}\right)^n \quad (6)$$

$$\text{⑤ より } p_n + q_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(p_1 + q_1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\therefore p_n + q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{1}{2} \quad (7)$$

⑥・⑦ より

$$2p_n = \left(-\frac{5}{18}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{1}{2}$$

$$p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{18}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{1}{4} \quad (8)$$