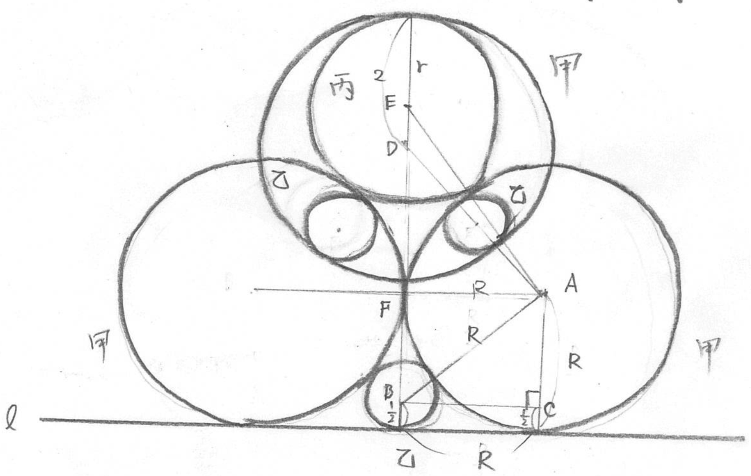
慶應義塾大学　環境情報学部　2017

I　上甲円と下甲円，上乙円の中心が同一直線上にあるとき



・甲円の半径を R とすると，△ABC が直角三角形より

$$\left(R+\frac{1}{2}\right)^2-\left(R-\frac{1}{2}\right)^2=R^2$$

$\therefore$ $R = 2$ 寸

よって 甲円の直径は <u>4</u> 寸

・よって $AD = 2 \cdot 2 - 1 = 3$（寸）

よって D と l との距離は <u>$(2+\sqrt{5})$ 寸</u>

また，丙円の半径を r とすると，

△AFE が直角三角形より

$$(2+\sqrt{5}-r)^2+2^2=(2+r)^2$$

$$\therefore \quad r=\frac{16+7\sqrt{5}}{22}$$

よって 直径は $\underline{\dfrac{16+7\sqrt{5}}{11}}$ 寸

II

- $1 = 2^0 3^0$ より 成立

- n が 偶数 のとき. $\frac{n}{2}$ は n より小さいので

$\frac{n}{2} = a_1 + \cdots + a_l$ と条件にあうようにかける

$\therefore\ n = 2a_1 + \cdots + 2a_l$

これは条件を満たす形であるため成立

- n が 奇数 のとき $3^k \leqq n < 3^{k+1}$

となるように k を選ぶと.

- $n = 3^k$ のとき 成立

- $3^k < n$ のとき $n - 3^k$ は 偶数 なので

$n - 3^k = 2b_1 + \cdots + 2b_m$ と条件に合うようにかける.

$\therefore\ n = 2b_1 + \cdots + 2b_m + 3^k$ となる.

$b_s \leqq \frac{n-3^k}{2} < \frac{3^{k+1} - 3^k}{2} = 3^k$ より

b_s は 3^k でわられず $2b_s$ は 3^k をわらない.

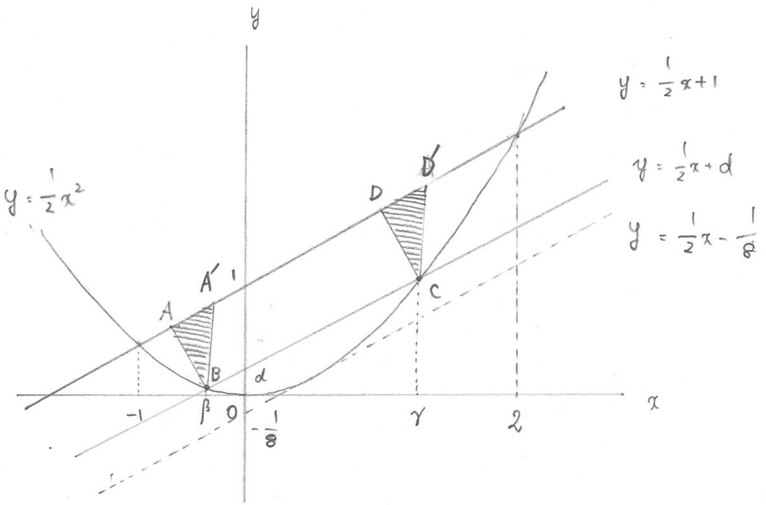
よって条件の形でかけるため成立

以上より任意の n で成立する

この方法で

$2017 = 2^8 \cdot 3^0 + 2^7 \cdot 3^1 + 2^3 \cdot 3^4 + 2^0 \cdot 3^6$

Ⅲ



$y=\frac{1}{2}x^2$ について、$y'=x$ より

$y'=\frac{1}{2}$ のとき $x=\frac{1}{2}$ であるから、

$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$ が傾き $\frac{1}{2}$ となる

$y=\frac{1}{2}x^2$ の接線である。

よって上のグラフから、$-\frac{1}{8}<d<1$

今、B, C の x 座標を β, γ とすると

これは $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+d$ の解のため、

解と係数の関係から

$$\begin{cases}\beta+\gamma=1\\ \beta\gamma=-2d\end{cases}$$

$\gamma>\beta$ より

$$\gamma-\beta=\sqrt{(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma}$$
$$=\sqrt{8d+1}$$

求める面積 S は □A′BCD′ の面積に等しく

$$S=(1-d)\sqrt{8d+1}$$
$$=\sqrt{8d^3-15d^2+6d+1}$$

$f(d)=8d^3-15d^2+6d+1$ とすると

$S=\sqrt{f(d)}$ より $f(d)$ が最大のとき S も最大となる

$$f'(d)=24d^2-30d+6$$
$$=24(d-1)\left(d-\frac{1}{4}\right)$$ より

$f'(d)=0$ のとき $d=\frac{1}{4}, 1$

よって増減は

d	$-\frac{1}{8}$	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$f'(d)$		$+$	0	$-$	
$f(d)$		↗	$\frac{27}{16}$	↘	

よって $f(d)$, S は $d=\frac{1}{4}$ で最大になり

このとき $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ⅳ

(1) 表が 2回出ると 賞金は 1円より大きくなるため.

$$1-0.8^2 = \underline{0.36}$$

(2) 表が $(c+1)$ 回出ると 賞金は c円より大きくなるため.

確率は $1-0.8^{c+1}$

$\therefore\ 1-0.8^{c+1} < 0.5$

$\therefore\ 0.8^{c+1} < 0.5$

$c = \underline{3}$ のとき 初めて この不等式をみたす

(3) 期待値は

$$0(1-0.8) + 1((1-0.8^2)-(1-0.8)) + \cdots$$

$$\cdots + 99((1-0.8^{100})-(1-0.8^{99})) + 100\cdot 0.8^{100}$$

$$= 0.8 + 0.8^2 + \cdots + 0.8^{100}$$

$$= \frac{0.8(1-0.8^{100})}{0.2}$$

$$= 4 - 4\cdot 0.8^{100}$$

$4\cdot 0.8^{100} < 0.05$ より 四捨五入すると $\underline{4.0}$

Ⅴ

$$f(x) = px - \frac{8}{3}x^3$$

$f'(x) = p - 8x^2$ である

(i) $f(1) \leqq \frac{1}{3}$, $f(-1) \leqq \frac{1}{3}$ より

$$\underline{3p-1 \leqq 8 \leqq 3p+1}$$

$f'(x)=0$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ に解をもち.

その点で $f(x)$ の符号が変化するには.

$\underline{0 < \frac{p}{8} \leqq 1}$ で.

このとき $x = \pm\sqrt{\frac{p}{8}}$ で fは極値をとる

$f\left(\pm\sqrt{\frac{p}{8}}\right) \leqq \frac{1}{3}$ より

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{p^3}{8}} \leqq \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \underline{\frac{p^3}{8} \leqq \frac{1}{4}}$$

f が最大となるとき $x = \pm 1, \pm\sqrt{\frac{p}{8}}$ のいずれかのため

以上のとき 条件を満たす

(ii) $f(\pm 1) \leqq \dfrac{1}{q}$ より

$$\underline{3p-1 \leqq q \leqq 3p+1}$$

$f'(x)=0$ の解が $x<-1,\ 1<x$ に存在するため

$$\underline{1 < \frac{p}{q}}$$

以上のとき条件を満たす

(iii) $f(\pm 1) \leqq \dfrac{1}{q}$ より

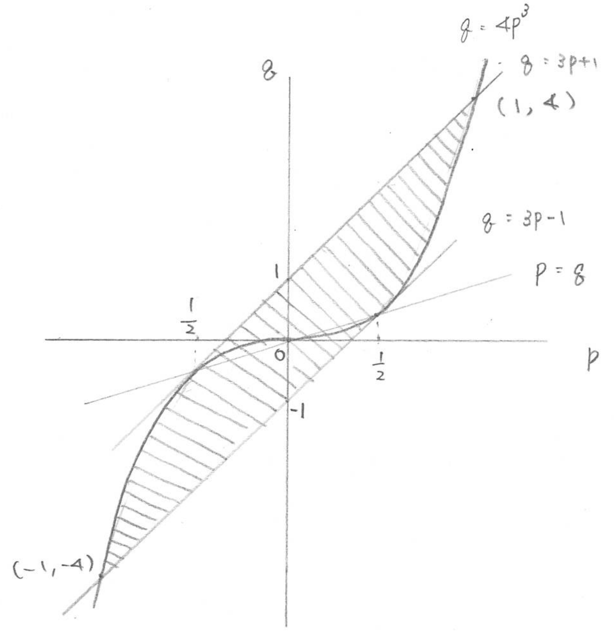
$$\underline{3p-1 \leqq q \leqq 3p+1}$$

$f'(x)$ の符号が変わる点が存在しないため

$$\underline{\frac{p}{q} \leqq 0 \quad , \quad q=0}$$

以上のとき条件を満たす

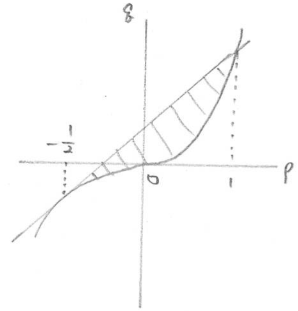
(i)(ii)(iii) より A は以下の境界を含む斜線部分



よって A の面積 S は

$$S = 2\left(1+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(3p+1-4p^3)\,dp\right) = \frac{27}{8}$$

<別>



$q=3p\pm1$ が $\left(\mp\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$ で $q=4p^3$ に接することを利用すると

$$S = 2\left(\frac{1}{12}\cdot 4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)$$
$$= \underline{\frac{27}{8}}$$

Ⅵ

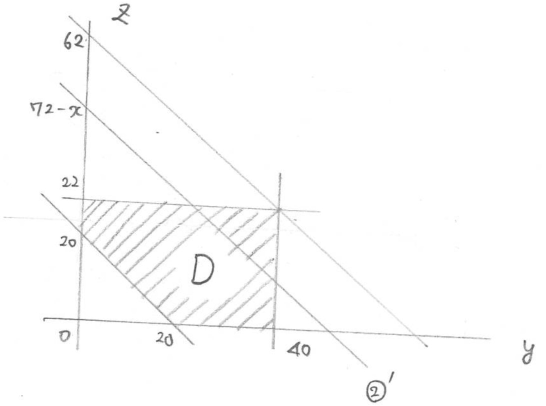
(1) ①〜⑤を同時に満たすことは、以下の①'〜⑤'を同時にみたすことと同値である

$$\begin{cases} y, z \geq 0, \quad y+z \leq 72 & -①' \\ y+z = 72-x & -②' \\ z \leq 22 & -③' \\ y \leq 40 & -④' \\ y+z \geq 20 & -⑤' \end{cases}$$

②'は yz 平面上で傾き -1 z切片 $(72-x)$ の直線を表し

$D = \{(y,z) : y, z$ は ①' ③'〜⑤' をみたす$\}$ とすると

Dは以下の境界を含む斜線部分



Dと②'との共通部分が空でないとき

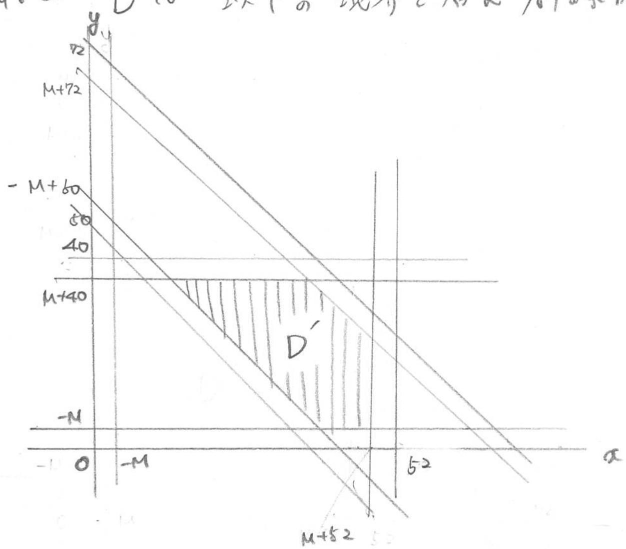
$20 \leq 72-x \leq 62 \quad \therefore 10 \leq x \leq 52$

よって $x=10$, $y=40$, $z=22$ で、xが最小となる

(2) $z = 72-(x+y)$ のため

$D' = \{(x,y) :$ ①.② を満たし、$50-(x+y),\ 32-(x+z),\ 20-(y+z),\ -x, -y, -z \leq M\}$

とすると D'は以下の境界を含む斜線部分



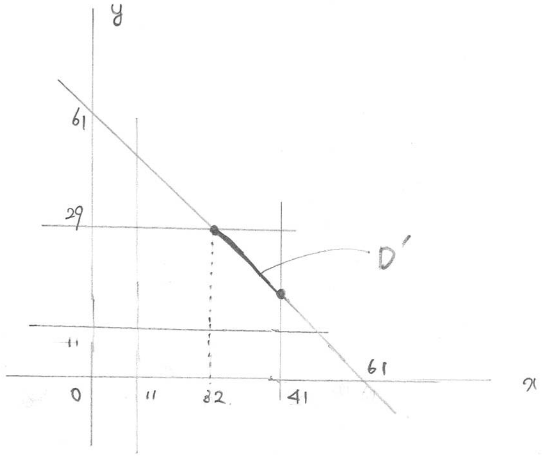
D'が空でないとき

$$\begin{cases} -M \leq M+52 \\ -M \leq M+40 \\ -M+50 \leq M+72 \\ -M+50 \leq 2M+92 \\ -2M \leq M+72 \end{cases}$$

$\therefore -11 \leq M$

よって M が最小のとき $M = -11$

このとき、D' は下のようになる



$z = 72 - (x+y) = 11$

$32 \leqq x \leqq 41$