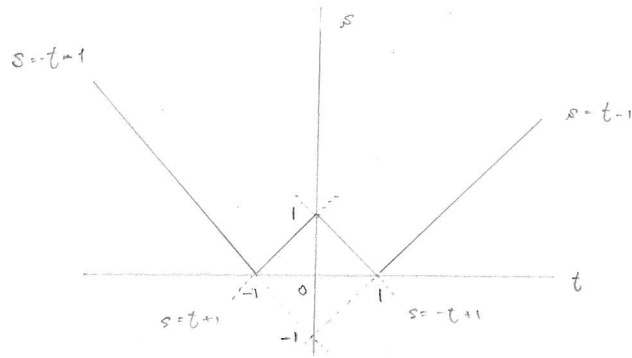


1

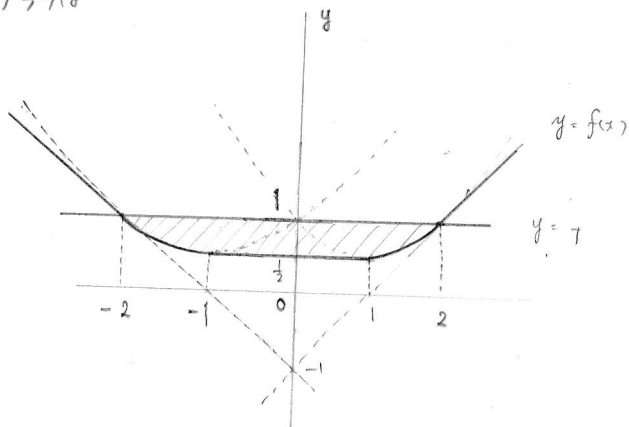
(1)  $g(t) = |t| - 1$  のグラフは下の図の部分

= a b c

$$y = f(x)$$

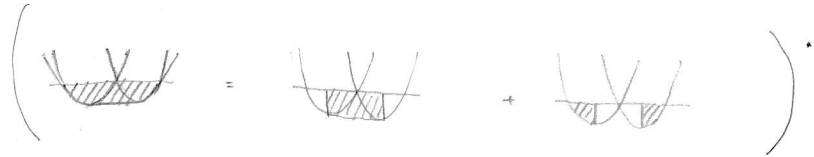
$$= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} |t| - 1 \, dt = \begin{cases} x-1 & (2 \leq x) \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & (1 \leq x < 2) \\ \frac{1}{2} & (-1 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & (-2 \leq x < -1) \\ -x-1 & (x < -2) \end{cases}$$

グラフは

よ、 $y=1$  と  $y=f(x)$  との囲まれた部分の

面積を

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^3 = \frac{5}{6}$$



(2)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

= 0 の実数解 1, 3 を含むもの

$$(x-1)(x-3)(x^2 + px + 1) = 0$$

と因数分解できる。

= a b c

$$\begin{cases} a = p - 4 \\ b = -4p + 4 \\ c = 3p - 4 \end{cases}$$

のため

a, b, c が整数 となるのは

p が整数 となるのは 同値 である

∴  $f(x) = x^2 + px + 1$  とおくと.

•  $f(x) = 0$  が 実数解 2 つとある.

この解を  $\alpha, \beta$  とおくと 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 & \text{--- ①} \\ \alpha + \beta = -p & \text{--- ②} \end{cases}$$

$\alpha, \beta$  は 1 と 3 の積.

① より  $\alpha = \beta = 1 \quad \therefore p = -2$

∴  $a = \underline{-6}$

•  $f(x) = 0$  が 実数解 2 つとも正の数.

この判別式  $D = p^2 - 4$

$$= (p-2)(p+2) < 0$$

$$\therefore -2 < p < 2$$

$p$  は 整数 のため  $-1 \leq p \leq 1$

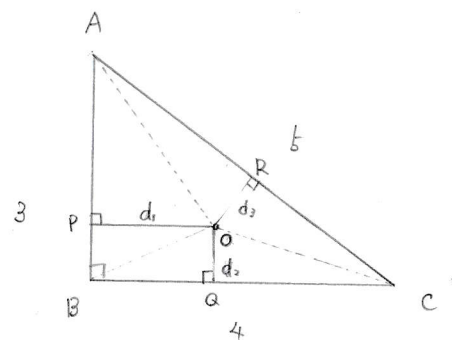
∴  $a = p - 4$  より

$$-5 \leq a \leq -3 \quad \text{∴ 条件を満たす}$$

以上より  $a$  の 最大値 は  $-3$

最小値 は  $-6$

(3)



$OP = d_1, OQ = d_2, OR = d_3$  とおくと.

$\triangle ABC$  は 直角三角形 とおくと.

∴

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC \quad \text{より}$$

$$\frac{3}{2}d_1 + \frac{4}{2}d_2 + \frac{5}{2}d_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$\therefore 3d_1 + 4d_2 + 5d_3 = 12 \quad \text{--- ①}$$

∴  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$  とおくと.

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = 12$$

$$|\vec{a}| |\vec{p}| \geq (\vec{a} \cdot \vec{p}) \quad \left( = |\vec{a}| |\vec{p}| \cos \theta \right) \quad \text{より}$$

$$|\vec{p}|^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{72}{25}$$

等号は  $\vec{a} \parallel \vec{p}$  成立のため、 $\therefore a \geq 3$

$$\begin{cases} d_1 = 3k \\ d_2 = 4k \\ d_3 = 5k \end{cases} \quad (k \text{ は実数})$$

と仮定

①より  $k = \frac{6}{25}$

$\therefore a \geq 3$   $O$  は  $\triangle ABC$  内部にあり、

$$OP = \frac{18}{25}, \quad OQ = \frac{24}{25}, \quad OR = \frac{6}{5}$$

$\therefore OP^2 + OQ^2 + OR^2$  は最小値  $\frac{72}{25}$  である。

(4)  $\max \{ 10^{-k} 2^n, 10^{100} 3^{-n} \} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \underset{-①}{10^{-k} 2^n \geq 1} \quad \text{または} \quad \underset{-②}{10^{100} 3^{-n} \geq 1}$$

②が成立立つとす。

$$10^{100} \geq 3^n$$

$$\therefore 100 \geq n \log_{10} 3$$

$$\therefore n \leq \frac{100}{\log_{10} 3}$$

$$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772 \text{ のため}$$

$$209 < \frac{100}{\log_{10} 3} < 210 \quad \text{である。}$$

$$n \text{ は整数 } \therefore n \leq 209$$

よって  $210 \leq n$  と仮定任意の整数  $n$  について

①が成立するとはす。

$\therefore 10^{-k} 2^n$  は  $n$  に関して単調増加するから

$$10^{-k} 2^{210} \geq 1 \quad \text{である。}$$

$$10^k \leq 2^{210}$$

$$k \leq 210 \log_{10} 2$$

$$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011 \quad (*)$$

$$63 < 210 \log_{10} 2 < 64 \quad \text{のとき}$$

これを満たす最大の整数  $k$  は

$$k = \underline{\quad 63 \quad}$$

2

$$(1) \quad n = 4k \quad \text{と可なり.} \quad (k \text{ は正の整数})$$

$$[\sqrt[3]{n}] = 2$$

$$2 \leq \sqrt[3]{4k} \leq 3$$

$$\therefore 8 \leq 4k \leq 27$$

$$\therefore 2 \leq k < \frac{27}{4}$$

$k$  は正の整数のため、これを満たす  $k$  は

$$k = 2, 3, 4, 5, 6 \quad \text{のため}$$

$$n = \underline{\quad 8, 12, 16, 20, 24 \quad}$$

$$(2) \quad n = p_n^2 k \quad (k \text{ は正の整数}) \quad \text{と可なり.}$$

$$[\sqrt[3]{n}] = p_n$$

$$\therefore p_n^3 \leq p_n^2 k < (p_{n+1})^3$$

$$\therefore p_n \leq k < p_{n+1} + \frac{3p_{n+1}}{p_n^2}$$

こゝで

$P_n$  は  $1 \leq P_n \leq 10^2$  とする正の整数と置く。

$$\frac{3P_n+1}{P_n^2} > 1 \quad \text{あれば}$$

$$P_n^2 - 3P_n - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2} < P_n < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$\therefore P_n = 1, 2, 3.$$

とあるため

条件を満たす  $n$  の個数は

$$\cdot P_n = 1 \quad \text{あれば} \quad 7$$

$$\cdot P_n = 2 \quad \text{あれば} \quad 5$$

$$\cdot P_n = 3 \quad \text{あれば} \quad 5$$

$$\cdot 4 \leq P_n \leq 99 \quad \text{あれば} \quad 4$$

$$\cdot P_n = 100 \quad \text{あれば} \quad 1$$

よゝて  $1 \leq P_n \leq 100$  とする正の整数と置く。

$$7 + 5 + 5 + 4 \cdot 96 + 1 = \underline{402}$$

(3)

(2) に おける条件を満たす  $n$  の個数を

$g_n$  と表すことにする。

$$\cdot 4 \leq P_n \leq 99 \quad \text{あれば}$$

$$n = P_n^3, P_n^2(P_n+1), P_n^2(P_n+2), P_n^2(P_n+3)$$

$$\left( \begin{aligned} P_n^3 &= P_n(P_n+1)(P_n-1) + P_n \\ P_n^2(P_n+1) &= P_n(P_n+1) \cdot P_n + 0 \\ P_n^2(P_n+2) &= P_n(P_n+1) \cdot P_n + P_n^2 \\ P_n^2(P_n+3) &= P_n(P_n+1)(P_n-1) + P_n^2 - P_n \end{aligned} \right. \quad \text{とある}$$

$$0 \leq 0, P_n, P_n^2, P_n^2 - P_n \leq P_n(P_n+1) \quad \text{とある}$$

$$\text{よゝて} \quad P_n, 0, P_n^2, P_n^2 - P_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{P_n(P_n+1)-1} g_n = 2P^2$$

$$P_n = 1 \text{ a.e. } n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 7 \quad (*)$$

$$\sum_{n=1}^7 g_n = 1 + 0 + \dots + 1 = 2 \cdot 1^2 + 2$$

$$P_n = 2 \text{ a.e. } n = 8, 12, 16, 20, 24 \quad (**)$$

$$\sum_{n=8}^{24} g_n = 2 \cdot 2^2 + 0$$

$$P_n = 3 \text{ a.e. } n = 27, 36, 45, 54, 63 \quad (***)$$

$$\sum_{n=27}^{63} g_n = 2 \cdot 3^2 + 3$$

$$P_n = 100 \text{ a.e. } n = 10^6 \quad (***)$$

$$\sum_{n=10^6}^{10^6} g_n = 100$$

$$S = \sum_{k=1}^{99} 2k^2 + 2 + 0 + 3 + 100$$

$$= \underline{656805}$$

3

$$(1) \quad P_n(x) = 0 \quad \text{if}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ の範囲に}$$

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, \dots, (n-1)) \quad ?$$

相異なる  $n$  個の解を  $\theta$  とする

$$P_n(x) = a(x - \cos \theta) \cdot \dots \cdot (x - \cos \frac{2(n-1)\pi}{n})$$

$$\text{と表す。} \quad \cos n\theta \neq 0 \text{ かつ } \theta \in$$

代入すると  $a$  は定数となる

$$P_n(x) \text{ は } -\text{意的に定まる}$$

$$\text{また} \quad \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$$

$$= 2\cos\theta \cos n\theta \quad (**)$$

$$P_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)$$

$$\text{よって } P_{n+1}'(x) = 2x P_n'(x) - P_{n-1}'(x), \quad P_1'(x) = x, \quad P_0(x) = 1$$

と表すように帰納的に  $P_n'(x)$  は定数と

$$P_n'(x) \text{ は } n\text{-次式と表す。} \quad P_n'(\cos\theta) = \cos n\theta$$

$$\text{よって } P_n'(x) = P(x)$$

$$P_{n+1}(x) = 2x P_n(x) - P_{n-1}(x)$$

(2) 求  $a_n$  の係数  $a_n$  と  $a_{n+1}$  との関係

(i)  $x^{n+1}$  の係数を比較して

$$a_{n+1} = 2a_n \quad (n=1 \text{ でも成立})$$

$$\text{また, } a_1 = 1 \text{ より}$$

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$(3) 10^{1000} \cos^2(500\theta)$$

$$= 10^{1000} \left( P_{500} \left( \frac{1}{10} \right) \right)^2$$

$$= 10^{1000} \left( 2^{499} \cdot \frac{1}{10^{500}} + \dots \right)^2$$

$$= (2^{499})^2 + 10k \quad (k \text{ は整数})$$

と  $2^{499}$  の 1 の位を求めればよい

$2^n$  の 1 の位は

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  に対する

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

くり返し

と 1 の位は

$$(2^{499})^2 = 2^{998} \text{ の 1 の位は } \underline{4}$$