早稲田大学　教育学部　理科系　2017

$\boxed{1}$

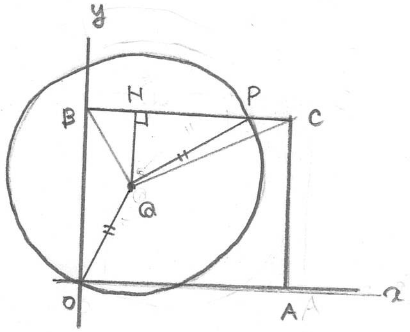
(1) 正方形内部の点Qが OPの垂直二等分線上にあるとき.

Qを中心とし O.Pを通る円が描けるため

Qが求める範囲に含まれることは 中心Q.であり

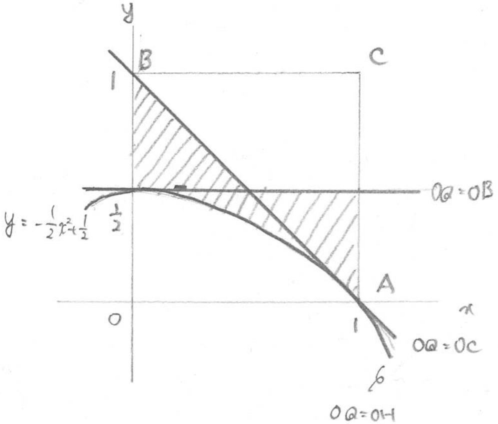
Oを通る円と線分 BC との共有部分が空でないことと

同値である



このとき. $QH \leqq OQ \leqq \max\{QB.QC\}$ であればよい

よって Q の範囲は下の境界を含む斜線部分



よって求める面積 S は

$$S = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^3\right)$$

$$= \frac{7}{24}$$

(2)

$a_1 \cdots a_{n+1}$ が条件を満たす並べ方で. $a_i = n+1$ のとき

ここから a_i をとり除いた順列を調べる.

(A) $i = n+1$ のとき.

$a_1 \cdots a_n$ が条件を満たす順列のため

このような順列は P_n 通り

(B) $1 \leqq i \leqq n$ のとき

$a_i > a_{i+1}$ となるため.

(i) $a_{i-1} > a_{i+1}$ のとき.

$a_1 \cdots a_{i-1}\, a_{i+1} \cdots a_{n+1}$ が条件を満たす順列となるため

i が $1 \leqq i \leqq n$ を動くとき P_n 通りある

(ii) $a_{i-1} < a_{i+1}$ のとき

$a_1 \cdots a_{i-1}\, a_{i+1} \cdots a_{n+1} = 1\ 2 \cdots n$

となる. このとき i は $1 \leqq i \leqq n$ で任意のため

i が $1 \leqq i \leqq n$ を動くとき n 通りある

(A)(B) より

$$P_{n+1} = 2P_n + n$$

(3)

$\alpha = \cos\frac{\pi}{7}$ とすると.

$$\cos\frac{2}{7}\pi = 2\alpha^2 - 1$$

$$\cos\frac{3}{7}\pi = 4\alpha^3 - 3\alpha$$

$$\cos\frac{4}{7}\pi = 2(2\alpha^2-1)^2 - 1 = 8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1$$

ここで $\cos\frac{3}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi = 0$ より

$$(4\alpha^3 - 3\alpha) + (8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1) = 0$$

$$(\alpha+1)(8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0$$

$$\therefore\ 8\alpha^3 - 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \quad (\because \alpha \neq -1)$$

このため

$f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ とすると.

$f(0) = 1,\ f\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = 0$ となる

(4)

$x = 0$ を代入し

$$f(0) + f(0) = 0 \quad \therefore\ f(0) = 0$$

また任意の実数 a について $x = c^n a$ を代入し (nは非負整数)

$$f(c^n a) + f(c^{n+1} a) = c^{2n} a^2$$

$$\therefore\ (-1)^{n+1} f(c^{n+1} a) = (-1)^n f(c^n a) - (-c^2)^n a^2$$

これより,

$$(-1)^n f(c^n a) = f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} (-c^2)^k a^2$$

$$= f(a) - \frac{1 - c^{2n}}{1 + c^2} a^2$$

両辺 $n \to \infty$ の極限をとると. $|c| < 1$ より $c^n \to 0$,

f が連続関数のため $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n f(c^n a)| = |f(0)| = 0$

であるから.

$$0 = f(a) - \frac{1}{1+c^2} a^2$$

$$\therefore\ f(a) = \frac{1}{1+c^2} a^2$$

$$f(x) = \frac{1}{1+c^2} x^2$$

慶早進学塾 MJ 2

2

$\alpha\beta \neq 0$ より、$z \neq 0$ であり、$\frac{\alpha}{\beta}$ が実数であるため

・$\frac{\alpha}{\beta} > 0$ のとき

$$\begin{cases} \alpha = r_1(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \beta = r_2(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases} \quad (r_1, r_2 > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける

ここで $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ とすると、$(R>0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

$$\begin{cases} (r_1+r_2)(\cos\theta + i\sin\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ r_1 r_2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = R\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} R = r_1 r_2 = r_1 + r_2 & \text{—Ⓐ} \\ \varphi = \theta \quad \therefore 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n = 0, 1, 2) & \text{—Ⓑ} \end{cases}$$

Ⓐより $t^2 - Rt + R = 0$ は $t > 0$ に
2つの実数解をもつため $R \geq 4$

Ⓑより $\varphi = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

・$\frac{\alpha}{\beta} < 0$ のとき

$$\begin{cases} \alpha = r_1(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \beta = r_2(\cos\theta + i\sin\theta) \end{cases} \quad (r_1 r_2 < 0,\ r_1 + r_2 > 0\ \ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける

このとき $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(R>0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$ として

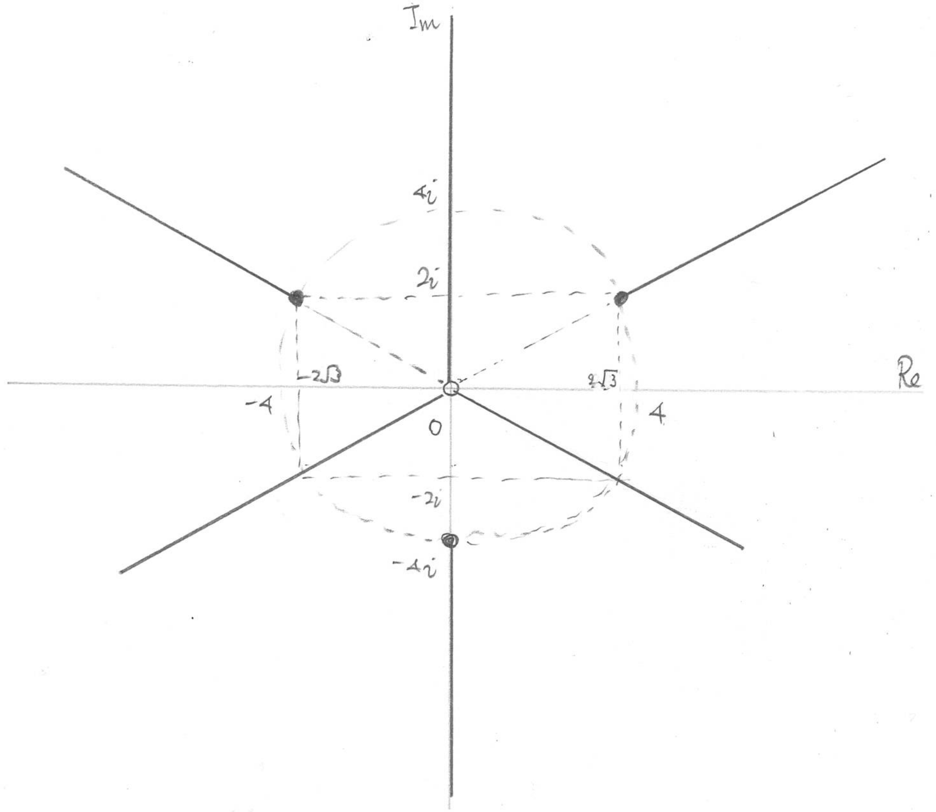
$$\begin{cases} (r_1+r_2)(\cos\theta + i\sin\theta) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ (-r_1 r_2)(\cos(\pi+2\theta) + i\sin(\pi+2\theta)) = R\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} R = r_1 + r_2 = -r_1 r_2 & \text{—Ⓐ}' \\ \varphi = \theta \quad \therefore 3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n = 1, 2, 3) & \text{—Ⓑ}' \end{cases}$$

Ⓐ'より $t^2 - Rt - R = 0$ が正、負両方の解をもつが
このとき $R \geq -4$　$\therefore R > 0$

Ⓑ'より $\varphi = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

以上より 求める範囲は下図のようになる



$\boxed{3}$ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ となる

(1) Dは平面OAB上の点のため、

$\overrightarrow{OD} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ (α, βは実数) とおける

このとき

$\vec{a} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ より　$\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta - \frac{1}{2} = 0$

$\vec{b} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ より　$\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\therefore$ $\alpha = 2 - \sqrt{6}$, $\beta = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OD} = (2 - \sqrt{6})\overrightarrow{OA} + (2\sqrt{2} - \sqrt{3})\overrightarrow{OB}$

(2)

$$|\vec{CD}|^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 1 + \sqrt{3}\alpha\beta - \alpha - \sqrt{2}\beta$$

$$= \sqrt{6} - 2$$

$$\triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{e}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{e})^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

よって求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\sqrt{6}-2}$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{6}-2}$$

$\boxed{4}$

(1) $a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 8(n-1) & (n \geqq 2) \end{cases}$

(2) ① $n = 3k \quad (k = 1, 2, \ldots)$ のとき

$$b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_2$$

$$= (8(n-1) + \cdots + 8\cdot 1)$$

$$- (8(n-3) + 8(n-6) + \cdots + 8\cdot 3)$$

$$= \frac{8}{3}n^2$$

② $n = 3k+1 \quad (k = 1, \ldots)$ のとき

$$b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_3 + a_1$$

$$= (8n + \cdots + 8\cdot 1)$$

$$- (8(n-3) + 4(n-6) + \cdots + 8\cdot 1)$$

$$+ 1$$

$$= \frac{8}{3}n^2 - \frac{5}{3} \quad (n=1 \text{ も成立})$$

③ $n = 3k+2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ のとき

$$b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots + a_4 + a_2 + a_1$$

$$= \left(8(n-1) + \cdots + 8\cdot 1\right)$$

$$- \left(8(n-3) + \cdots + 8\cdot 2\right)$$

$$+ 1$$

$$= \underline{\frac{8}{3}n^2 - \frac{5}{3}}$$ ($n = 2$ でも成立)

$$\therefore\ b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{3}n^2 & (n = 3k) \\ \dfrac{8}{3}n^2 - \dfrac{5}{3} & (n = 3k \pm 1) \end{cases}$$

(3) (2)より

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{n^2} = \underline{\frac{8}{3}}$$