2018 年度 慶應義塾大学 理工学部 数学 解答例

慶早進学塾

2018 年 2 月 12 日

1

(1)

$$x^4 - 2x^3 + 3x^3 - 2x + 1 = 0$$

これは $x = 0$ を解に持たない. このため, 両辺に x^{-2} をかけ,

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) + 3 = 0.$$

また, $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ である. よって,

$$\underline{y^2 - 2y + 1 = 0}.$$

このため $y = 1$ となるから,

$$x + \frac{1}{x} = 1, \qquad \underline{x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}}.$$

(2)

$$x^3 + y^3 + xy - 3 = 0$$

$$\begin{cases} s = x + y \\ t = xy \end{cases} \quad \text{としたとき,}$$

$$s^3 - 3st + t - 3 = 0.$$

$s \neq \frac{1}{3}$ であるから,

$$\underline{t = \frac{s^3 - 3}{3s - 1}}.$$

ここで, X の方程式 $X^2 - sX + t = 0$ は $X = x, y$ を解にもつ. x, y は実数であったから, 判別式 $D = s^2 - 4t \geq 0$.

$$s^2 - \frac{4(s^3 - 3)}{3s - 1} \geq 0.$$

$$s^2(3s-1)^2 - 4(s^3 - 3)(3s - 1) \geq 0, \qquad s \neq \frac{1}{3}.$$

$$-(3s - 1)(s - 2)(s^2 + 3s + 6) \geq 0, \qquad s \neq \frac{1}{3}.$$

また, $s^2 + 3s + 6 = (s + \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ であるから,

$$\underline{\frac{1}{3} < s \leq 2.}$$

(3)

$$(x - 1)(x^{3n} - 1) = (x - 1)(x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$$
$$(x^3 - 1)(x^n - 1) = (x - 1)(x^n - 1)(x^2 + x + 1)$$

であるから, $x^{2n} + x^n + 1$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れることを示せば十分である. ここで, $x^2 + x + 1 = 0$ の相異なる 2 つの解を ω_1, ω_2 とする. このとき ${\omega_i}^3 = 1$ $(i = 1, 2)$ である. さらに, $n = 3k + 1$ (k は非負整数) とおけるから,

$${\omega_i}^n = ({\omega_i}^3)^k \omega_i = \omega_i,$$
$${\omega_i}^{2n} + {\omega_i}^n + 1 = {\omega_i}^2 + \omega_i + 1 = 0.$$

よって因数定理により $x^{2n} + x^n + 1$ は $x - \omega_1, x - \omega_2$ をそれぞれ因数に持つ. このため, これは $x^2 + x + 1 = (x - \omega_1)(x - \omega_2)$ で割り切れる. よって主張は示された.

2

さいころを投げて 1 または 2 の目がでる事象, 3 または 4 の目がでる事象, 5 または 6 の目がでる事象をそれぞれ A, B, C で表すこととする．また, n 回目までに事象 A, B, C が起こった回数をそれぞれ a_n, b_n, c_n で表すこととする.

(1) このとき, $(a_2, b_2, c_2) = (2,0,0), (0,1,1)$ である．よって求める確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}}.$$

(2) 3 回投げて, P の x 座標と y 座標とがともに 0 以下となるとき, $(a_3, b_3, c_3) = (0,1,2), (0,0,3)$ である．求める確率はこの事象の余事象の確率であるから,

$$1 - \left\{{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} = \underline{\frac{23}{27}}.$$

(3) P の x 座標が 2 以上のとき, 求める確率は

$$1 - \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\} = \underline{\frac{11}{27}}.$$

P の x 座標が 2 以上となり, かつ y 座標が 0 となるとき, $(a_4, b_4, c_4) = (2,1,1), (4,0,0)$. よってこの確率は

$$\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{13}{81}.$$

このため, 求める条件付き確率は

$$\frac{13}{81}\cdot\frac{27}{11} = \underline{\frac{13}{33}}.$$

(4) $(n-1)$ 回目までに A が 1 回起き, n 回目に A が起こる確率を求めればよい．このため

$$(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3} = \underline{\frac{(n-1)2^{n-2}}{3^n}}.$$

(5) さいころを k 回投げたとき初めて x 座標が 2 になり, かつ $(k+1)$ 回目で B または C が起こる確率は

$$\frac{(k-1)2^{k-2}}{3^k}\cdot\frac{2}{3} = (k-1)\frac{2^{k-1}}{3^k} \qquad (2 \leq k \leq n-1).$$

これらの事象は互いに排反のため, 求める確率は

$$\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)\frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-2}k\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$\underline{= -\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}}.$$

3

(1) $x=\sin\theta$ とすると, $dx=\cos\theta d\theta$,

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

であるから,

$$a_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

また, 部分積分を用いることで,

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta d\theta\\&=\Big[\sin\theta\cos^n\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^{n-1}\theta d\theta\\&=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cos^{n-1}\theta d\theta\\&=n(a_{n-2}-a_n)\end{aligned}$$

よって

$$\underline{a_n=\frac{n}{n+1}a_{n-2}.}$$

(2) $n\geq 2$ に対して $a_na_{n-1}=\frac{n}{n+1}a_{n-1}a_{n-2}$ であるから,

$$a_na_{n-1}=\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}a_1a_0.$$

よって

$$a_na_{n-1}=\frac{2}{n+1}a_1a_0=\underline{\frac{\pi}{2(n+1)}}.$$

（これは $n=1$ でも成立.）

(3) $0\leq x<1$ の各点において $0<(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ であり, 数列 $\{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\}$ は単調減少する. このため

$$0<\cdots<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_0.$$

よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1.$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^{-1}}{1+2n^{-1}}=1.$$

このため, はさみうちの定理により,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{na_na_{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(1+n^{-1})}}\cdot\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\\&=\underline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.\end{aligned}$$

4

(1) $||\overrightarrow{OB}|| = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 2||\overrightarrow{OB}||\cos\angle AOB$ となる．このため $\cos\angle AOB = \frac{1}{2}$．よって

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}.$$

以下 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}$ とする．このとき $||\overrightarrow{a}|| = 2$, $||\overrightarrow{b}|| = 6$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 6$ である．ここで, $\overrightarrow{c} = k\overrightarrow{a} + (1-k)\overrightarrow{b}$ とおくと, $||\overrightarrow{c}||^2 = (\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2$ より, $k = \frac{3}{2}$．よって

$$\underline{\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.}$$

このとき, $||\overrightarrow{c}|| = 3$ が得られる．よって $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} = 3$ である．さらに $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d} = 0$ であるから,

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d} = 0,$$
$$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d} = \underline{9}.$$

(2) $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} + u\overrightarrow{d}$ とする．Q は A, B, D を含む平面上の点であるから,

$$u = 1 - s - t$$

また, $||\overrightarrow{OQ}|| = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{a}$ より,

$$2s^2 + 6st + 3su + 3tu = 0.$$

以上より

$$\underline{s^2 + 3t^2 - 3s - 3t = 0}.$$

(3) 以上より

$$\frac{1}{3}(s - \frac{3}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 = 1.$$

よって

$$\begin{cases} s - \dfrac{3}{2} = \sqrt{3}\cos\theta \\ t - \dfrac{1}{2} = \sin\theta \end{cases}$$ とおける．(θ は実数)

また,

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{OQ}|| &= \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{a} \\ &= 3 + s + 3t \\ &= \sqrt{3}\cos\theta + 3\sin\theta + 6 \\ &= 2\sqrt{3}\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + 6. \end{aligned}$$

これが最大となるとき $\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ (n は整数)．つまり

$$(s, t, u) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -\sqrt{3} - 1).$$

よって

$$\underline{\overrightarrow{OE} = \frac{\sqrt{3}+3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\overrightarrow{OB} + (-\sqrt{3}-1)\overrightarrow{OD}}.$$

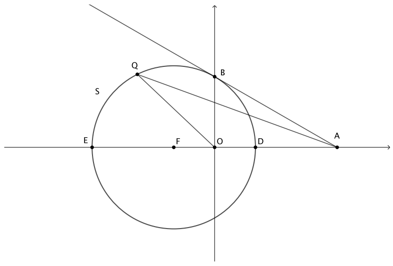
また, 平面 OCD に E から下ろした垂線の足を H とすると, $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{d}$ より,

$$\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{c} - \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{d}$$

このとき $||\overrightarrow{EH}|| = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$．よって求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OCD\cdot(2\sqrt{6}+3\sqrt{2}) = \underline{3\sqrt{6} + \frac{9\sqrt{2}}{2}}.$$

5



(1) $D(\frac{1}{v+1},0)$, $E(-\frac{1}{v-1},0)$ としたとき, 円 S は線分 DE を直径にもつ. このため半径 r は

$$\underline{r=\frac{v}{v^2-1}}.$$

また, S と y 軸の正の部分との交点は $B'(0,\frac{1}{\sqrt{v^2-1}})$ である. これは

$$AB'^2=AD\cdot AE=\frac{v^2}{v^2-1}$$

を満たすため, AB' は S に接するとわかる. このため, $B=B'$ である.

$$\underline{B\left(0,\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\right)}.$$

(2) 曲線 C 上の点は $(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)$ と表される. よって最短経路は

$$AB+\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=\underline{AB+\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}d\theta}.$$

ここで, $f(\theta)=\beta e^{\alpha(\theta_1-\theta_0)}$ とする. $f'(\theta)=\alpha f(\theta)$ であることに注意をすると,

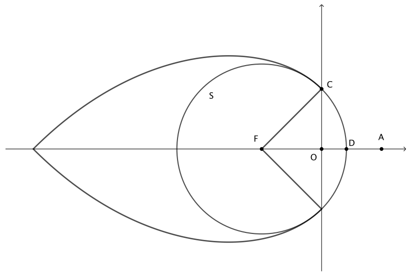
$$\begin{aligned}vf(\theta_1)&=AB+\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}d\theta\\&=vf(\theta_0)+\sqrt{1+\alpha^2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}f(\theta)d\theta\\&=vf(\theta_0)+\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\big(f(\theta_1)-f(\theta_0)\big)\end{aligned}$$

よって

$$\left(v-\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\right)\big(f(\theta_1)-f(\theta_0)\big)=0.$$

$f(\theta_1)\neq f(\theta_0)$ のとき $v=\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$. よって

$$\underline{\alpha=\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}}.$$



$v=\sqrt{2}$ のとき, $\alpha=1$, $\beta=1$ となる. C で囲まれた部分のうち, $x<0$, $y>0$ の部分の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(e^{\theta-\frac{\pi}{2}}\right)^2d\theta=\frac{e^\pi-1}{4}.$$

$x>0$ の部分の面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

よって C で囲まれた面積は

$$2\cdot\frac{e^\pi-1}{4}+(\frac{\pi}{2}-1)=\underline{\frac{e^\pi+\pi-3}{2}}.$$