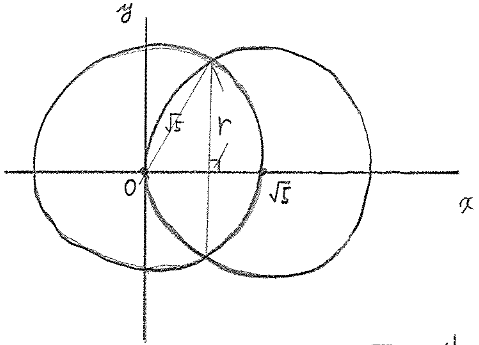
慶應義塾大学　商学部　2018.

I

(i) 図形を xy 平面で切った断面を考える.

・$r_1 = \sqrt{5}$ のとき, 断面は以下のようになる



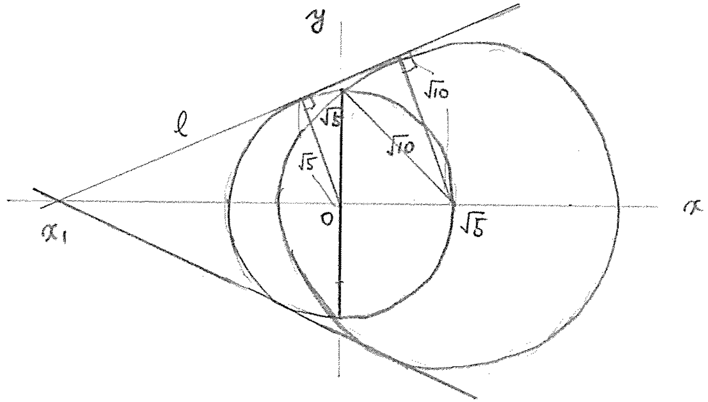
S_0 と S_1 が交わってできる円の半径を r とすると

$r = \sqrt{5}\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ より

円周の長さは $\sqrt{15}\pi$

・円周の長さが最大となるとき, r が最大となる

これは $r = r_0 = \sqrt{5}$ となるときであり



図より $r_1 = \sqrt{10}$

また, l が S_0, S_1 に接するとき, l と x 軸との交点 $(x_1, 0, 0)$ は

図より $(-x_1) : \sqrt{5} = (\sqrt{5} - x_1) : \sqrt{10}$ を満たす

$\therefore\ x_1 = -\sqrt{5} - \sqrt{10}$

・$k = 1$ の場合と同様に, S_{k-1} と S_k の交わりが最大となるよう順次 r_k を定めたとき,

$r_k = \sqrt{2}\, r_{k-1}$ が成り立つ. よって $r_k = (\sqrt{2})^k r_0$

このため r_k が r_0 の 100 倍以上となるには

$(\sqrt{2})^k \geqq 100 \quad \therefore\ k \geqq 14$

(ii) ・$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ であるから,

$|\overrightarrow{OA}|^2 = 6$, $|\overrightarrow{OB}|^2 = 24$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -6$

・$\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ とすると,

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -3+\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ より, $C(-3+\sqrt{3}, -3-\sqrt{3})$

- $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BD}$ より $\overrightarrow{OD} = k_1\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ （k_1：実数）

とおける。また、$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ のため $k_1 = 4$。

よってこのとき $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OA}$ より、$\underline{|\overrightarrow{BD}| = 4|\overrightarrow{OA}|}$

ここで、$\begin{cases} \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \end{cases}$ である。

このため $\underline{\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}}$

- $\overrightarrow{OE} = k_2\overrightarrow{OB}$ （k_2：実数）とおく。

ここで、$\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ であるから、

$\overrightarrow{OE} = (-2k_2)\overrightarrow{OC} + (-k_2)\overrightarrow{OD}$。

さらに、Eは直線CD上にあるため

$-2k_2 - k_2 = 1 \quad \therefore \ k_2 = -\frac{1}{3}$

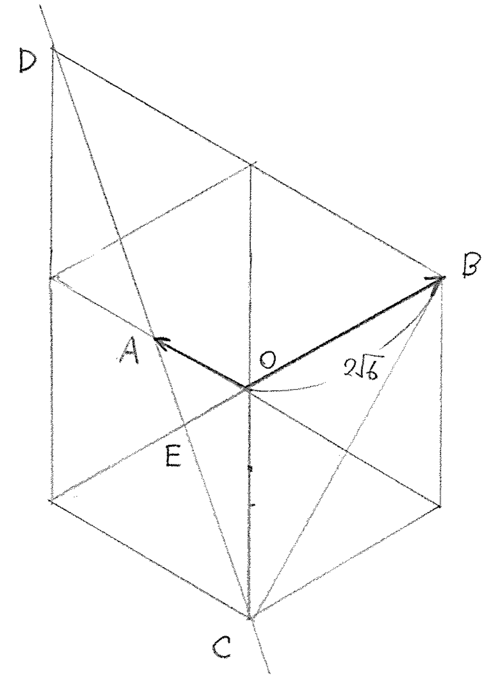
よって $\dfrac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \left|\dfrac{k_2}{1-k_2}\right| = \underline{\dfrac{1}{4}}$

$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{OD} = \underline{\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}}$

$\triangle OAC = \frac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{OA}\|^2\|\overrightarrow{OC}\|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2} = \underline{3\sqrt{3}}$

さらに、$\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AC}$ が求まるため、

$\triangle BCD = 8\triangle OAC = \underline{24\sqrt{3}}$



II

・$f_{n+1}(x) = (f_n(x)g(x))'$

$= \left\{\frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{3}a_n + 3\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}b_n + 3a_n\right)x + 3b_n\right\}'$

$= x^2 + \left(\frac{2}{3}a_n + 6\right)x + \left(\frac{1}{3}b_n + 3a_n\right)$

このことから

$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 6$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 3a_n$ となる。

ここで $a_{n+1} - 18 = \frac{2}{3}(a_n - 18)$ が成立するため、

a_nの一般項は $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1 - 18) + 18$,

よって数列$\{a_n\}$が単調減少するのは $a_1 > 18$ —①

を満たすときである。

・$y = f_1(x)$ と $y = g(x)$ が接するとする。このとき

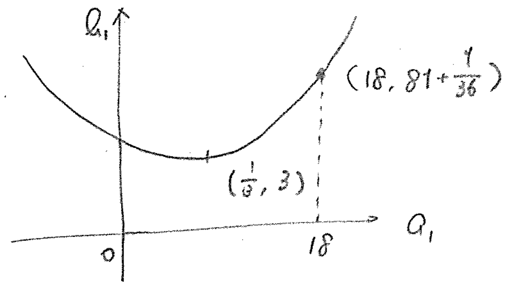
$f_1(x) - g(x) = x^2 + \left(a_1 - \frac{1}{3}\right)x + (b_1 - 3) = 0$

の判別式Dが0となる。

このため $\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)^2 - 4(b_1 - 3) = 0$

$\therefore b_1 = \frac{1}{4}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 3$

グラフは次の通り



よって $a_1 > 18$ の範囲で b_1は単調増加するため、

条件を満たす中で a_1が最小のとき、b_1も最小となる。

b_1は4の倍数のため 最小のとき $b_1 = 84$

このとき $a_1 = 18 + \frac{1}{3} = \frac{55}{3}$ となる。

・初項をこのように定めると、a_nの一般項は

$a_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 18$

また、これは常に $18 < a_n < 19$ を満たすため、

$[a_n] = 18$.

よって $a_n - [a_n] < 0.001$ となるとき

$\frac{2^{n-1}}{3^n} < 0.001$

10を底とする対数をとると

$(\log_{10}2-\log_{10}3)n-\log_{10}2<-3$

$\therefore\ 0.176n>2.699$

これを満たす最小の n は $\underline{n=16}$

・$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+3\cdot18$ である

$\therefore\ 3^{n+1}b_{n+1}=3^n b_n+9\cdot2^{n-1}+18\cdot3^{n+2}$

よって $3^n b_n=\sum_{k=1}^{n-1}(9\cdot2^{k-1}+18\cdot3^{k+2})+3b_1$

$=9\cdot2^{n-1}+3^{n+4}$

$\therefore\ \underline{b_n=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+81}$

III

(i) $W(3,0)=\dfrac{1}{2}$, $W(3,5)=W(3,10)=\dfrac{1}{4}$

$W(4,0)=W(4,5)=\dfrac{3}{8}$

$W(4,10)=W(4,15)=\dfrac{1}{8}$ である．

(ii) $W(k+1,5k)$ は客 k が $5(k-1)$ 分待ち，B を行う確率より，

$$W(k+1,5k)=W(k,5(k-1))\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{k-1}}\cdot{}_{k-1}C_{\frac{k+(k-1)-1}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2^k}\,{}_kC_k$$

同様に，

$$W(k+1,5(k-1))=W(k,5(k-2))\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+(k-2)}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^k}\,{}_kC_{k-1}$$

・$1\leqq t\leqq k-2$ のとき，$W(k+1,5t)$ は
客 k が $5(t+1)$ 分待った後に A を行う確率と
$5(t-1)$ 分待った後に B を行う確率の和である．

$$\therefore W(k+1,5t)=W(k,5(t+1))\times\frac{1}{2}+W(k,5(t-1))\times\frac{1}{2}$$

○ $k+t+1$ が奇数のとき，

$$W(k,5(t+1))=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+(t+1)-1}{2}},\quad W(k,5(t-1))=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+(t-1)-1}{2}}$$

よって

$$W(k+1,5t)=\frac{1}{2^k}\left({}_{k-1}C_{\frac{k+t}{2}}+{}_{k-1}C_{\frac{k+t}{2}-1}\right)=\frac{1}{2^k}\,{}_kC_{\frac{k+t}{2}}$$

○ $k+t+1$ が偶数のとき，

$$W(k,5(t+1))=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+(t+1)}{2}},\quad W(k,5(t-1))=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+(t-1)}{2}}$$

よって

$$W(k+1,5t)=\frac{1}{2^k}\left({}_{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}}+{}_{k-1}C_{\frac{k+t+1}{2}-1}\right)=\frac{1}{2^k}\,{}_kC_{\frac{k+t+1}{2}}$$

(iii) $t=0$ のとき

○ $k+1$ が奇数のとき

$$W(k,5)=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+1-1}{2}},\quad W(k,0)=\frac{1}{2^{k-1}}\,{}_{k-1}C_{\frac{k+0}{2}}$$

また，一般に $p\geqq q\geqq 0$ のとき ${}_pC_q={}_pC_{p-q}$ のため

$$W(k+1,0)=\frac{1}{2^k}\left({}_{k-1}C_{\frac{k}{2}}+{}_kC_{\frac{k}{2}-1}\right)=\frac{1}{2^k}\,{}_kC_{\frac{k}{2}}$$

◦ $k+1$ が偶数のとき,

$$W(k,5) = \frac{1}{2^{k-1}} {}_{k-1}C_{\frac{k+1}{2}} \quad , \quad W(k,0) = \frac{1}{2^{k-1}} {}_{k-1}C_{\frac{k+0-1}{2}}$$

よって

$$W(k+1,0) = \frac{1}{2^{k}} \left({}_{k-1}C_{\frac{k+1}{2}} + {}_{k-1}C_{\frac{k+1}{2}-1} \right) = \frac{1}{2^{k}} {}_{k}C_{\frac{k+1}{2}}$$

以上より ④ が $t=0$ のとき成り立つ

よって任意の $n \geqq 2$ となる自然数 n について

$0 \leqq t \leqq n-1$ のとき, ④ が成り立つ $\square$