慶應義塾大学　経済学部　2018

1

(1) 円Cは $(x-4)^2+(y-a)^2=4^2$ と表せる。

このため、円Cの半径は4、中心P(4, a)である。

Pがl上にあるとき　$a=4+1=\underline{5}$　$\boxed{(1)}$

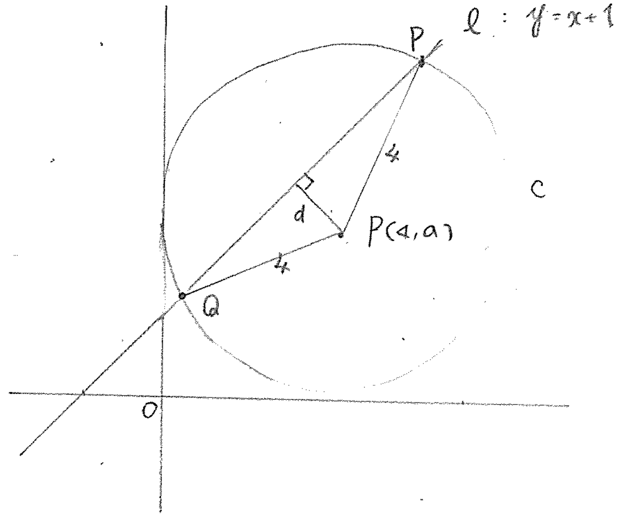
(2) lと点Pとの距離をdとする。

すると　$d=\dfrac{|4-a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a-5|}{\sqrt{2}}$

lとCとが異なる2点で交わる必要十分条件は

$$d=\frac{|a-5|}{\sqrt{2}}<4$$

$\therefore\ \underline{5-4\sqrt{2}<a<5+4\sqrt{2}}$　$\boxed{(2)}$ ~ $\boxed{(5)}$



(3) $\triangle PQR=8$ のとき

$\frac{1}{2}\cdot 4^2\sin\angle QPR=8$　$\therefore\ \angle QPR=90^\circ$

このとき　$d=4\cos 45^\circ=2\sqrt{2}$ である。

$\therefore\ \dfrac{|a-5|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$　$\therefore\ \underline{a=1,\ 9}$　$\boxed{(6)}$ $\boxed{(7)}$

(4) $\angle PQR=150^\circ$ のとき、

$d=4\cos 75^\circ$ である。

$$\therefore\ d^2=\frac{(a-5)^2}{2}=4^2\cos^2 75^\circ$$

$$=8(\cos 150^\circ+1)$$

$$=4(2-\sqrt{3})$$

$\therefore\ (a-5)^2=\underline{16-8\sqrt{3}}$　$\boxed{(8)}$ ~ $\boxed{(11)}$

2

(1) カードに書かれている関数について
$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ をそれぞれ計算すると

以下のようになる

関数	枚数	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$\int_0^2 f(x)dx$
$-6x+15$	7枚	15	9	3	18
$-3x^2+12$	5枚	12	9	0	16
$6x^2-10x+11$	3枚	11	7	15	18
$6x$	1枚	0	6	12	12

よって $f(1)>8$ となる確率は $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$ // $\boxed{(12)}$・$\boxed{(13)}$

$f(1)>8$ かつ $\int_0^2 f(x) > 17$ となる確率は $\dfrac{7}{16}$

よって求める条件付確率は $\dfrac{7}{16}\times\dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{12}$ //

$\boxed{(14)}$ ～ $\boxed{(16)}$

(2) 表から、$f_1(0)>g_1(0)$ かつ $f_1(2)>g_1(2)$ となるのは

$(f_1(x),\ g_1(x)) = (-6x+15,\ -3x^2+12)$, $(6x^2-10x+11,\ 6x)$

のときであると分かる。

このため、求める確率は

$\dfrac{7}{16}\cdot\dfrac{5}{15} + \dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{1}{15} = \dfrac{19}{120}$ // $\boxed{(17)}$ ～ $\boxed{(21)}$

(3) (2)と同様に考えて

$f_2(0)>g_2(0)$ かつ $f_2(2)>g_2(2)$ となる確率は

$\dfrac{7}{16}\cdot\dfrac{5}{16} + \dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{1}{16} = \dfrac{19}{128}$ // $\boxed{(22)}$ ～ $\boxed{(26)}$

また、$0\leqq x\leqq 2$ のとき $f_2(x)>g_2(x)$ となる場合

表から $f_2(x)=6x^2-10x+11$, $g_2(x)=6x$ となるときを

調べれば良いと分かる。

このとき $f_2(x)-g_2(x) = 6\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}>0$ より

確かに $0\leqq x\leqq 2$ で $f_2(x)>g_2(x)$ となる

よって求める確率は

$\dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{256}$ // $\boxed{(27)}$ ～ $\boxed{(30)}$

慶早進学塾

3

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{a_{n+1}}{1-r} \quad (n=0,1,\dots) \quad —①$$

(1)

① に $n=0$ を代入すると $a_1 = \underline{1}$ を得る $\boxed{(31)}$

また, $n=1,2,\dots$ に対して $a_n = S_n - S_{n-1}$ である.

$$\therefore\ a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{r^n - r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{a_{n+1}-a_n}{1-r}$$

$$\therefore\ \underline{a_{n+1} = r a_n + r^n} \quad \boxed{(32)}\cdot\boxed{(33)}$$

ここで $b_n = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$ とおくと, $b_{n+1} = b_n + 1$ となる

よって $\{b_n\}$ は 初項 $b_1 (= a_1) = \underline{1}$

公差 $\underline{1}$ の 等差数列 になる. $\boxed{(34)}\cdot\boxed{(35)}$

このため $b_n \left(= \dfrac{a_n}{r^{n-1}}\right) = n \quad \therefore\ \underline{a_n = n r^{n-1}}$ $\boxed{(36)}$

① に代入すると,

$$\underline{S_n = \frac{1-(n+1)r^n + n r^{n+1}}{(1-r)^2}} \quad —② \quad \boxed{(37)} \sim \boxed{(39)}$$

(2) $(k+1)a_k - rka_{k-1} = a_k + k(a_k - r a_{k-1})$

$$= a_k + k r^{k-1}$$

$$= \underline{2a_k} \quad \boxed{(40)}$$

これを用いて,

$$(1-r)T_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)a_k - \sum_{k=1}^{n+1} rka_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2a_k - r(n+1)a_n$$

$$= \underline{2S_n - r(n+1)a_n} \quad —③ \quad \boxed{(41)} \sim \boxed{(43)}$$

(3) ②, ③ より

$$(1-r)T_n = 2\cdot\frac{1-(n+1)r^n + n r^{n+1}}{(1-r)^2} - n(n+1)r^n$$

整理して,

$$\underline{T_n = \frac{1}{(1-r)^3}\left\{2-(n+1)(n+2)r^n + 2n(n+2)r^{n+1} - n(n+1)r^{n+2}\right\}} \quad \boxed{(44)} \sim \boxed{(51)}$$

4

(1) 真数条件より

$f(x)-2>0$, $f(x-1)-\frac{3}{2}>0$, $f(x)+g(x)-2>0$

つまり $2^x+2^{-x}>2$, $2^{x-1}+2^{-x+1}>\frac{3}{2}$, $2^{x+1}>2$

このため $0<x$ となる.

この範囲において, $y=2^x$ とおくと

等式は

$$-\log_2(y+y^{-1}-2)+\log_2\left(\frac{1}{2}y+2y^{-1}-\frac{3}{2}\right)+\log_2(2y-2)=1$$

$$\therefore \frac{\left(\frac{1}{2}y+2y^{-1}-\frac{3}{2}\right)(2y-2)}{y+y^{-1}-2}=2$$

式を整理し, $(y-1)(y-2)(y-3)=0$

$\therefore y=1, 2, 3$

$\therefore x=0, 1, \log_2 3$

真数条件より, $\underline{x=1 \ \log_2 3}$ //

(2)

$f(1)f(-1)+g(1)g(-1)=(2+2^{-1})^2-(2-2^{-1})^2$

$=\underline{4}$ //

(3) $f(\alpha)f(\beta)=(2^{\alpha}+2^{-\alpha})(2^{\beta}+2^{-\beta})$

$=\left(2^{(\alpha+\beta)}+2^{-(\alpha+\beta)}\right)+\left(2^{(\alpha-\beta)}+2^{-(\alpha-\beta)}\right)$

$=f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)$

同様にして

$g(\alpha)g(\beta)=f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)$

$f(\alpha)g(\beta)=g(\alpha+\beta)-g(\alpha-\beta)$

$g(\alpha)f(\beta)=g(\alpha+\beta)+g(\alpha-\beta)$ が得られる

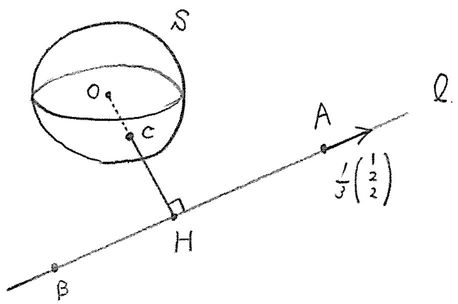
以上より

$f(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\{f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)\}$

$g(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\{f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)\}$ //

5

(1)



Oと直線l上の点とを結ぶ線分の長さが最小となるとき、それはlに直交し、その長さはOとlとの距離に等しい。このようなl上の点をHとする

lは $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ と表される（t：実数）

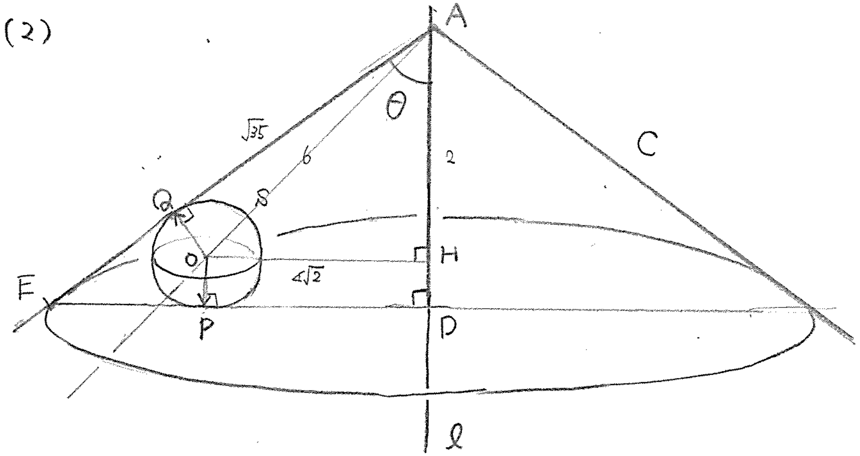
このため Hがl上にあり、$\overrightarrow{OH}\perp\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ となることから

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}-2\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ が得られる。このため $\|\overrightarrow{OH}\|=\sqrt{\|\overrightarrow{OA}\|^2-\|\overrightarrow{AH}\|^2}$
$=4\sqrt{2}$

また、線分OHとSとの交点をCとすると、線分CHが、S上の点とl上の点とを結ぶ線分のうち長さが最小となるものである

よって求める最小値は $4\sqrt{2}-1$

(2)



S, C は上のように点P, Qで接する

まず $\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{AH}$ より $P=\pm\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{AH}$とは同じ向きのため $P\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

次に $Q(x_1,y_1,z_1)$ とおく

QはS上の点より $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$,

また、原点Oと直線lとを含む平面をπとすると、

Qはπ上の点である。πは $y=z$ と表されるから $y_1=z_1$

さらに、$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ より $x_1(x_1-6)+y_1^2+z_1^2=0$

以上から $Q\left(\frac{1}{6},\pm\frac{\sqrt{70}}{12},\pm\frac{\sqrt{70}}{12}\right)$（複号同順）が得られる

Qは直線AO（=x軸）に関してHと反対側に位置するため $y_1>0$ ∴ $Q\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{70}}{12},\frac{\sqrt{70}}{12}\right)$

(3) $\|\overrightarrow{AQ}\| = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$ である

ここで、$\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{AH}$ とのなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{AQ}\|\cdot\|\overrightarrow{AH}\|} = \frac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18} = \frac{3}{2\sqrt{35}+4\sqrt{2}}$$

$$\therefore \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1}{9}(163 + 16\sqrt{70})$$

ここで、C の底面の中心を D とし、底面の半径を r とすると、

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AH}\| + 1 = 3$$

ここで、求める体積 V は、

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \|\overrightarrow{AD}\|$$
$$= \frac{1}{3}\pi(3\tan\theta)^2 \cdot 3$$
$$= (163 + 16\sqrt{70})\pi$$

(別) $\tan\theta$ を加法定理を用いて直接求めても良い

$\tan\angle OAQ = \frac{1}{\sqrt{35}}$、 $\tan\angle OAH = 2\sqrt{2}$ より

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{35}} + 2\sqrt{2}}{1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}} = \frac{8\sqrt{2}+\sqrt{35}}{3}$$

6

(1) $F(x) = x(x-1)R(x)$ （ $R(x)$ は x の整式 ） とおく

このとき $\begin{cases} P(x) = (x-1)R(x) \\ Q(x) = xR(x) \end{cases}$ となる

よって条件より $R(0)=4$, $R(1)=2$.

このため $R(x)$ は定数でないから.

$F(x)$ の次数が最小となるのは $R(x)$ が1次式のとき.

このとき $R(x) = -2x+4$ であるから.

$$f(x) = x(x-1)(-2x+4)$$
$$= \underline{-2x^3+6x^2-4x}$$

(2) $f'(x) = -6x^2+12x-4$

ここで 点 $(r, f(r))$ における接線の方程式は

$$y - f(r) = f'(r)(x-r)$$

つまり $y = f'(r)x + (f(r) - rf'(r))$ であるから

接線の傾きは $-6r^2+12r-4$

y切片は $\underline{4r^3-6r^2}$

(3) (s,t) が $(r, f(r))$ での C の接線上にあるとき,

$$t = (-6r^2+12r-4)s + (4r^3-6r^2)$$ である.

これを r の方程式とみたとき, これがちょうど2つの実数解をもつ (s,t) の条件を求めれば良い.

ここで, $g(r) = (-6r^2+12r-4)s + (4r^3-6r^2)$ とすると.

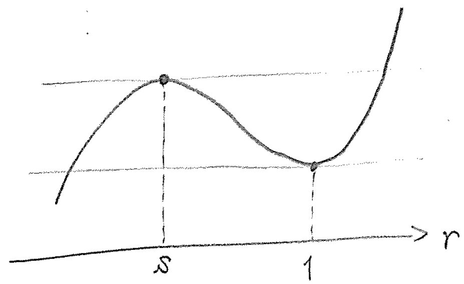
$Y=g(r)$ のグラフと $Y=t$ のグラフがちょうど交点を2つもてばよいことが分かる.

$g'(r) = 12(r-1)(r-s)$ であるから

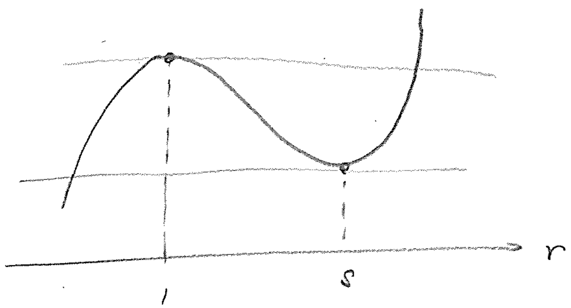
$g'(r)=0$ のとき $r = 1, s$.

よって $Y=g(r)$ のグラフは以下のようになる

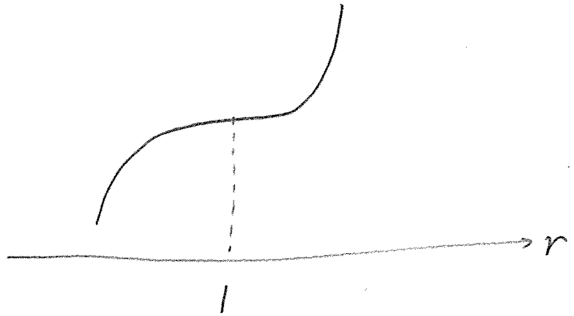
(i) $s<1$ のとき



(ii) $1<s$ のとき



(iii) $s=1$ のとき



よって 条件を満たすとき $s<1,\ 1<s$ であり,

$t=g(s)$ または $g(1)$

よって求める条件は

$s \neq 1$

かつ $\left(t=-2s^3+6s^2-4s \right.$ または $\left. t=2s-2 \right)$