早稲田大学 商学部 2018

1

(1) $|x-1| - ax + k^2 + ak - 2 = 0$

左辺を $f(x)$ とする.

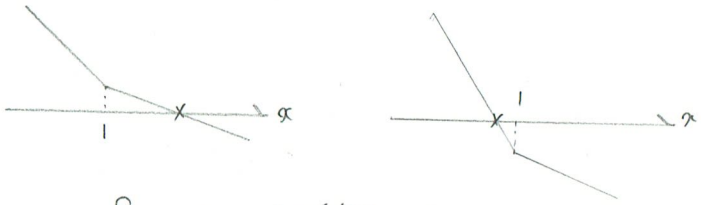
$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x + (k^2+ak-3) & (x \geqq 1) \\ (-1-a)x + (k^2+ak-1) & (x < 1) \end{cases}$$ である.

グラフは折れ線である.

(i) $a < -1$ のとき, $x<1$, $1<x$ それぞれでグラフの傾きは正のため グラフの概形は以下の通り.

このとき $f(x)=0$ は必ず解をもつ

(ii) $a > 1$ のとき, $x<1$, $1<x$ それぞれの範囲でグラフの傾きは負より 概形は以下のようになる



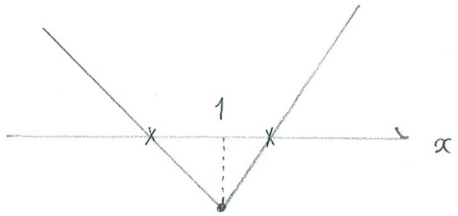
このとき $f(x)=0$ は必ず解をもつ.

よって $-1 \leqq a \leqq 1$ のときのみ考えれば良い

この範囲において $x<1$ での傾きは $-1-a \leqq 0$ ($a=-1$で等号成立)

$x>1$ での傾きは $1-a \geqq 0$ ($a=1$で等号成立) のため.

$f(x)=0$ が解をもつことは $f(1) \leqq 0$ であることと同値である.



よって. $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲でつねに $f(1) = (k-1)a + (k^2-2) \leqq 0$ となる k を求めれば良い.

$g(a) = (k-1)a + (k^2-2)$ とすると, これは1次関数

このため $g(-1) \leqq 0$ かつ $g(1) \leqq 0$ であれば良い.

$$g(-1) = k^2 - k - 1 \leqq 0$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{—①}$$

$$g(1) = k^2 + k - 3 \leqq 0$$

$$\therefore \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \leqq k \leqq \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad \text{—②}$$

①, ②より k の範囲は $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

よって 求める最大値は $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

(2) $a^2 = b^n + 225$

$\therefore\ b^n = (a+15)(a-15)$

ここで、bは素数であったから、ある非負整数 k, l が存在し

$$\begin{cases} a+15 = b^k \\ a-15 = b^l \end{cases} \quad (0 \leq l < k) \text{ とおける。} (\because a>0)$$

$\therefore\ b^k - b^l = b^l(b^{k-l}-1) = 30$

bは素数であったから $b^l = 1, 2, 3, 5$.

さらに このうち、条件を満たすものは

$(b, k, l) = (2, 5, 1), (31, 1, 0)$

このとき $(a, b, n) = \underline{(17, 2, 6)}$ $(\because n \geq 2)$

(3) $P(x)$ の次数を n とする。$(n \geq 1)$.

ここで、$\int_0^x \{P(t)\}^m dt = P(x^3) - P(0)$ であるから、

両辺を x で微分し

$\{P(x)\}^m = 3x^2 P'(x^3)$ を得る。

両辺の次数を比べると

$mn = 3(n-1)+2$ $(\because n \geq 1)$

$\therefore\ n(m-3) = -1$

m, n はともに正の整数であるから、$(m, n) = (2, 1)$

よって $P(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ とおく。

すると $(ax+b)^2 = 3ax^2$.

$a \neq 0$ より $(a, b) = (3, 0)$ $\therefore\ \underline{P(x) = 3x}$

(4)

- $m \geq 4$ であることを示す

$f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ とすると、これは

$$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ f(1+x) = f(1-x) \end{cases}$$ を満たす

$f(x)$ の周期は 4 であるから、$m \geq 4$ と分かる。

- $f(x+4) = f(x)$ を示す

条件から、

$$\begin{aligned} f(x+4) &= f(-x-2) \\ &= -f(x+2) \\ &= -f(-x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

以上より m の最小値は $\underline{4}$ と分かる。

2

$k \geq 2$ に対して $a_k(x) = 2^{k-1}x - [2^{k-1}x]$

であることを数学的帰納法で示す

(i) $k=2$ のとき $a_2(x) = 2x - [2x]$

このため成立

(ii) $a_k(x) = 2^{k-1}x - [2^{k-1}x]$ のとき

$$a_{k+1}(x) = 2^k x - 2[2^{k-1}x] - [2^k x - 2[2^{k-1}x]]$$

$$= 2^k x - \cancel{2[2^{k-1}x]} - [2^k x] + \cancel{2[2^{k-1}x]}$$

$$= 2^k x - [2^k x]$$

(i), (ii) より 任意の $k \geq 2$ で $a_k(x) = 2^k x - [2^k x]$

このため $a_k(x) = 0$ のとき ある整数 m が存在し

$x = \dfrac{m}{2^{k-1}}$ とおける。

(1) 以上のことから、$\dfrac{i}{12}$ $(i=1, \dots, 11)$ のうち、

約分して $\dfrac{m}{2^{k-1}}$ (k, m は正の整数, $m < 2^{k-1}$) となるものを

求めれば良く、

$$S_{12} = \left\{ \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$$

(2) $1 \leq n \leq 2018$ において

$\dfrac{i}{n}$ を約分して $\dfrac{m}{2^{k-1}}$ となるとき、 (k, m, 正の整数, $m < 2^{k-1}$)

$n \geq 2^{k-1}$ としてよい。

$\therefore$ $k \leq 11$ である。

よって $T \subset \left\{ \dfrac{m}{2^{10}} \,\middle|\, m = 1, \dots, 2^{10}-1 \right\}$ である

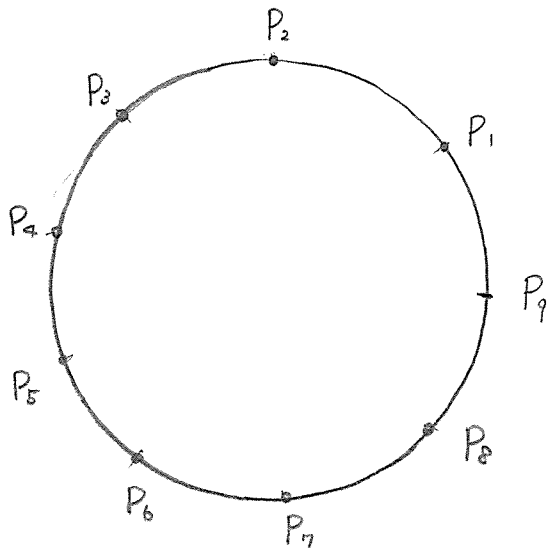
また、$S_{1024} (= 2^{10}) = \left\{ \dfrac{m}{2^{10}} \,\middle|\, m = 1, \dots, 2^{10}-1 \right\}$ であるから

$$\left\{ \frac{m}{2^{10}} \,\middle|\, m = 1, \dots, 2^{10}-1 \right\} \subset T$$

$$\therefore T = \left\{ \frac{m}{2^{10}} \,\middle|\, m = 1, \dots, 2^{10}-1 \right\}$$

よって T の要素の個数は $2^{10}-1 = \underline{1023}$

3



(1) $(A_1, A_2) = (P_1, P_2)$ とする.

$A_n = P_{a_n}$ となるように a_n を定めると.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
a_n	1	2	9	4	5	3	7	8	6	1	2	…

となり. 以下繰り返しが起きるため.

$n \geqq 10$ においては $a_n = a_{n-9}$ となる.

$\therefore \quad k = a_{15} = a_6 = \underline{3}$ //

(2)

(1) の表において $\angle A_n O A_{n+1}$ (劣角) を計算すると.

$$\angle A_n O A_{n+1} = \begin{cases} \frac{2}{9}\pi & (n = 3k+1) \\ \frac{4}{9}\pi & (n = 3k+2) \\ \frac{8}{9}\pi & (n = 3k) \end{cases}$$

よって $\angle A_1 O A_2 = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$ のときは.

適当に回転, 対称移動をし, さらに番号をずらすことで

(1) の場合と同じ繰り返しが得られる.

特に $\{A_k \mid k = 1, 2, \dots\} = \{P_1, \dots, P_9\}$ となることが分かる.

よって $\angle A_1 O A_2 = \frac{2}{3}\pi$ となるときのみ考えれば良い

ここで. $(A_1, A_2) = (P_1, P_4)$ のとき

n	1	2	3	4	5	…
a_n	1	4	7	1	4	.

となり

$\{A_k \mid k = 1, 2, \dots\} = \{P_1, P_4, P_7\}$ となる。

この場合を回転・対称移動させることで

他の $\angle A_1OA_2 = \frac{2}{3}\pi$ となる場合も考えることができ、

$$\begin{cases} A_1, A_2 \in \{P_1, P_4, P_7\} \text{ のとき } \{A_k \mid k=1,2\cdots\} = \{P_1, P_4, P_7\} \\ A_1, A_2 \in \{P_2, P_5, P_8\} \text{ のとき } \{A_k \mid k=1,2\cdots\} = \{P_2, P_5, P_8\} \\ A_1, A_2 \in \{P_3, P_6, P_9\} \text{ のとき } \{A_k \mid k=1,2\cdots\} = \{P_3, P_6, P_9\} \end{cases}$$

であることが分かる。

よってすべての正の整数 n について $A_n \neq P_1$ となる

組 (A_1, A_2) の個数は

$${}_3P_2 + {}_3P_2 = \underline{12}$$