# 早稲田大学 社会科学部 2018

## 1

(1) 目の出方は36通りであり、これらは同様に確からしい

ここで、$(a, b)$ が $b \geqq \dfrac{a^2}{6}$ かつ $a \neq 3$ を満たすとき ○ で、

$b \geqq \dfrac{a^2}{6}$ かつ $a = 3$ を満たすとき ● で下の表に示す。

| $a$ \ $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 2 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 3 | | ● | ● | ● | ● | ● |
| 4 | | | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 5 | | | | | ○ | ○ |
| 6 | | | | | | ○ |

よって求める条件付確率は $\dfrac{5}{36} \times \dfrac{36}{24} = \underline{\dfrac{5}{24}}$ //

(2) $\sin\dfrac{b}{4}\pi \neq \cos\dfrac{a}{4}\pi$ となる $(a, b)$ を

○で表に示すと、以下の通り

| $a$ \ $b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | ○ | | ○ | ○ | ○ |
| 2 | ○ | ○ | ○ | | ○ | ○ |
| 3 | ○ | ○ | ○ | ○ | | ○ |
| 4 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | |
| 5 | ○ | ○ | ○ | ○ | | ○ |
| 6 | ○ | ○ | ○ | | ○ | ○ |

よって求める確率は $\underline{\dfrac{29}{36}}$ //

(3) $b^2 - 7b - ab - 2a^2 + 11a + 6 > 0$

つまり $(b + a - 6)(b - 2a - 1) > 0$ となる $(a, b)$ を

○で表すと次の通り。

| a \ b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ○ | ○ | | | | ○ |
| 2 | ○ | ○ | ○ | | | ○ |
| 3 | ○ | ○ | | | | |
| 4 | ○ | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

よって 求める確率は $\frac{10}{36} = \underline{\frac{5}{18}}$ //

2.

(1) $3 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv -1 \pmod{10}$

$3^3 \equiv -3 \pmod{10}$

$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ である

このため $3^{20} = (3^4)^5 \equiv 1^5 \equiv 1 \pmod{10}$

よって $3^{20}$ の 1 の位の数字は $\underline{1}$ //

(2) $3^n$ が 21 桁であることから

$$10^{20} \leqq 3^n < 10^{21}$$

$\therefore\ 20 \leqq n \log_{10} 3 < 21$.

$\log_{10} 3 = 0.4771$ とすると、$n$ が自然数であることから

$$42 \leqq n \leqq 44.$$

ここで $3^n$ の 1 の位が 7 であることから

(1) での議論により $n \equiv 3 \pmod{4}$

以上より $\underline{n = 43}$ //

(3) $\log_{10} 7 = 0.8451$ とすると

$\log_{10} 7^{70} = 70 \log_{10} 7 = 59.157$

ここで $0 = \log_{10} 1 < 0.157 < \log_{10} 2 = 0.3010$ のため

$\log_{10} 1 \cdot 10^{59} < \log_{10} 7^{70} < \log_{10} 2 \cdot 10^{59}$ が分かる。

$\therefore\ 1 \cdot 10^{59} < 7^{70} < 2 \cdot 10^{59}$

このため $7^{70}$ は 60桁の自然数で最高位は $\underline{1}$ //

(4) $\log_{10} 1.4 = \log_{10} 2 + \log_{10} 7 - 1 = 0.1461$

$\log_{10} 1.5 = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 0.1761$

$\therefore\ \log_{10} 1.4 < \log_{10} 7^{70} - 59 < \log_{10} 1.5$

$\therefore\ 1.4 \times 10^{59} < 7^{70} < 1.5 \times 10^{59}$

このため、$7^{70}$ の最高位の次の位は $\underline{4}$ //

3

(1) $x = t$ のとき

$$\frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 = t^2 + y^2 \geq t^2.$$

また、条件より $0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}$ である。

$\therefore\ z - \sqrt{2} \leq -\sqrt{2}t$

$\therefore\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}(1 - t) \quad (\because\ 0 \leq z \leq \sqrt{2})$

逆にこのとき $y = \sqrt{\frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 - t^2}$ とすれば

$(t, y, z)$ は F 上の点である。

$\therefore\ \underline{0 \leq z \leq \sqrt{2}(1 - t)}$ //

(2) $(O_tP_t)^2$

$= y^2 + z^2$

$= \left\{ \frac{1}{2}(z - \sqrt{2})^2 - t^2 \right\} + z^2$

$= \underline{\frac{3}{2}z^2 - \sqrt{2}z - t^2 + 1}$ //

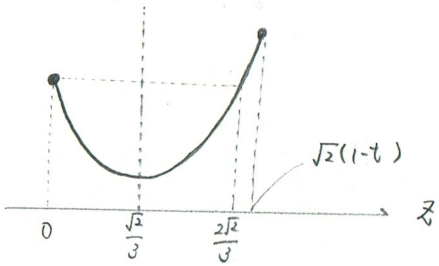
(3)

$$(O_tP_t)^2 = \frac{3}{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-t^2 + \frac{2}{3}\right)$$ である

(i) $0 \le t \le \frac{1}{3}$ のとき

$\frac{2\sqrt{2}}{3} \le \sqrt{2}(1-t)$ であるから

$(O_tP_t)^2$ のグラフは以下のようになる



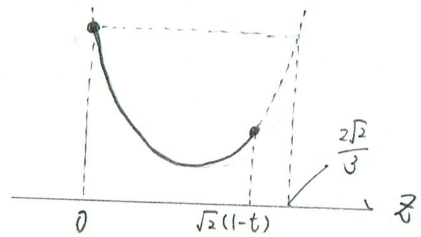

よって $(O_tP_t)^2$ は $z = \sqrt{2}(1-t)$ のとき最大値をとる

このため最大値は $\underline{2(1-t)^2}$

(ii) $\frac{1}{3} < t \le 1$ のとき

$\frac{2\sqrt{2}}{3} > \sqrt{2}(1-t)$ であるから

$(O_tP_t)^2$ のグラフは以下のようになる




よって $(O_tP_t)^2$ は $z = 0$ のとき最大値をとる

このため最大値は $\underline{-t^2+1}$

(i)(ii)より

$(O_tP_t)^2$ の最大値は $0 \le t \le \frac{1}{3}$ のとき $2(1-t)^2$

$\frac{1}{3} < t \le 1$ のとき $1-t^2$