[4]

$$x^2-2\{(\log_2 t)^2+1\}x+6(\log_2 t)^2+1=0 \quad \cdots ①$$

(1) 判別式Dについて

$$\frac{D}{4}=((\log_2 t)^2+1)^2-(6(\log_2 t)^2+1)$$

$$=(\log_2 t)^4-4(\log_2 t)^2$$

$$=(\log_2 t)^2((\log_2 t)^2-4)$$

①の実数解が存在しないとき

$D<0$, $\frac{D}{4}<0$

なので

$$(\log_2 t)^2((\log_2 t)^2-4)<0$$

よって $\log_2 t \neq 0$ 、かつ $(\log_2 t)^2-4<0$

$t \neq 1$ かつ $-2<\log_2 t<2$

よって $t \neq 1$ かつ $-\frac{1}{4}<t<4$

以上より $\frac{1}{4}<t<1$, $1<t<4$

(2) ①の実数解がただ1つ存在するとき、

判別式 $D=0$

となるので、そのときの t について考える。

$\frac{D}{4}=(\log_2 t)^2((\log_2 t)^2-4)=0$ より

$t=\frac{1}{4}, 1, 4$

よって $A=\{\frac{1}{4}, 1, 4\}$ である。

それぞれの t について①の実数解を求めていく。

(i) $t=\frac{1}{4}$ のとき $\log_2 t=-2$

①に代入して

$$x^2-2\{(-2)^2+1\}x+6(-2)^2+1=0$$

$$x^2-10x+25=0$$

$$(x-5)^2=0 \quad , \quad x=5$$

よって $f(\frac{1}{4})=5$

No.

Date

(2)つづき

(ii) $t=1$ のとき　$\log_2 t = 0$

①に代入して

$$x^2 - 2(0^2+1)x + 6(0)^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0, \quad x = 1$$

よって　$f(1) = 1$

(iii) $t=4$ のとき　$\log_2 t = 2$

①に代入して

$$x^2 - 2(2^2+1)x + 6 \cdot 2^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x-5)^2 = 0, \quad x = 5$$

よって　$f(4) = 5$

以上(i)〜(iii)より、$f(t)$ の $\left(\begin{array}{ll} \text{最大値：} 1 & (t=1\text{のとき}) \\ \text{最小値：} 5 & (t=\frac{1}{4}, 4\text{のとき}) \end{array}\right.$ である。

(3)　$1 \leqq \log_4 t \leqq \frac{3}{2}$ より

$$1 \leqq \frac{\log_2 t}{2} \leqq \frac{3}{2}$$

$$2 \leqq \log_2 t \leqq 3$$

よって　$4 \leqq t \leqq 8$

t がこの範囲を動くとき、

$$x^2 - 2\{(\log_2 t)^2 + 1\}x + 6(\log_2 t)^2 + 1 = 0 \quad \cdots ①$$

の実数解 x の最小値を求める。

ここで、$(\log_2 t)^2 = a$ とおくと

$2 \leqq \log_2 t \leqq 3$ より　$4 \leqq a \leqq 9$

よって ①式は

$$x^2 - 2(a+1)x + 6a + 1 = 0$$

となる。この式の $4 \leqq a \leqq 9$ における最小値を求める。

解の公式より

$$x = a+1 \pm \sqrt{(a+1)^2 - (6a+1)}$$
$$= a+1 \pm \sqrt{a^2 - 4a}$$

よって 条件より

$$f(t) = a+1 - \sqrt{a^2-4a}$$

ここで、 $g(a) = a+1-\sqrt{a^2-4a}$ とおき、 $4 \leqq a \leqq 9$ における最小値を求める。

$$g'(a) = 1 - \frac{2a-4a}{2\sqrt{a^2-4a}}$$
$$= 1 - \frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a}}$$
$$= 1 - \frac{a-2}{\sqrt{(a-2)^2-4}} < 0$$

よって $g(a)$ は単調減少関数である。

よって $a=9$ のときに最小値を持つこととなるので、求める最小値は

$$g(9) = 9+1-\sqrt{9^2-4\cdot 9}$$
$$= 10 - \sqrt{81-36}$$
$$= 10 - \sqrt{45}$$
$$= \underline{10 - 3\sqrt{5}}$$