早稲田大学人間科学部 数学

問1 (1) A赤組だとしたときの条件付き確率を考えると以下のようになる

Bが赤：$\frac{1}{2}$

Cが赤：$\frac{1}{4}$

Dが赤：$\frac{1}{4}$

Aが白だとしたときの条件付き確率を考える

Bが白：$\frac{1}{2}$

Cが白：$\frac{1}{4}$

Dが白：$\frac{1}{4}$

$\therefore$ ア：$\underline{2}$

(2) $\log_{10} 15^{50} = 50(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2)$

$= 58.805$

$\therefore \ 58 < \log_{10} 15^{50} < 59$ より イ：$\underline{59}$

また $\log_{10} \frac{15^{50}}{10^{58}} = 0.805$

$\therefore \ \log_{10} 6 < \log_{10} \frac{15^{50}}{10^{58}} < \log_{10} 7$ より ウ：$\underline{6}$

問2. $f(x) = 6x^3 - 3x$，$g(x) = \frac{3}{2}x^2 + a$ とする。

$f'(x) = 18x^2 - 3$　$g'(x) = 3x$

$\therefore \ f'(x) = g'(x)$ の解は $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{3}) = g(-\frac{1}{3})$ のとき，$a = \frac{11}{18}$

$f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ のとき，$a = -\frac{9}{8}$

$\therefore$ $\underline{\text{エ：}-9 \ \text{オ：}8 \ \text{カ：}11 \ \text{キ：}18}$

慶早進学塾

問3

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (x+1)(x-2) + (y-1)^2 = 0$

$\therefore (x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4}$

ここで $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sin\theta + 1 \end{pmatrix}$ とする

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{3 \cdot 5}{2}\cos\theta + \frac{5}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2}\sin\theta - 2$

$= \frac{1 + 3\sqrt{29}\sin(\theta+\alpha)}{2}$ (αは定数)

$\therefore$ 最大値は $\frac{1+3\sqrt{29}}{2}$ ($\because \forall\theta \in \mathbb{R}$)

ク:1 ケ:3 コ:29 サ:2

慶早進学塾

問4

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
b_n	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

ここで、$a_n+b_n+6\equiv 0 \pmod{10}$ となるのは $n\equiv 2,7 \pmod{12}$

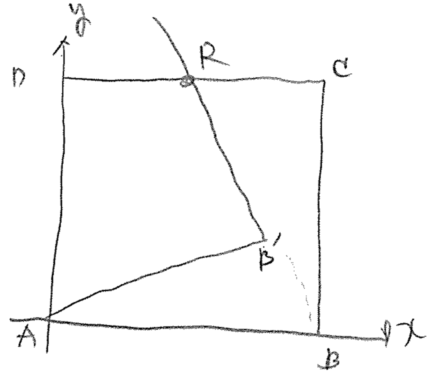
∴ $n\equiv 2,7 \pmod{12}$ となる n を書き出すと、

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_n	2	7	14	19	26	31	38	43	50	55

∴ $c_9=50$　$c_{10}=55$

シ:50 ス:55

問5



$B'(\cos\theta, \sin\theta)$ とする

$R\left(\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, 1\right)$

$$B'R=\left\{\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}-\cos\theta\right)^2+(1-\sin\theta)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

共通部分の面積は、$\triangle AB'R+\triangle ADR=2\triangle ADR$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}$$

$\sin\theta=s$ とすると

$$9-18s+9s^2=4-4s^2$$

$$13s^2-18s+5=0$$

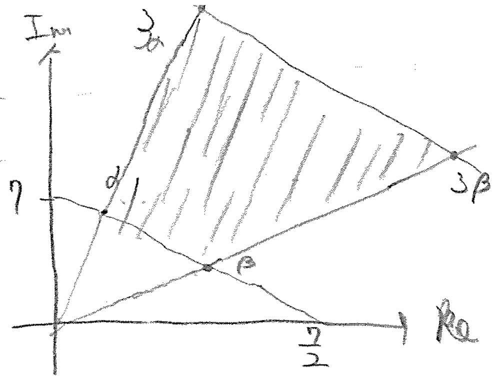
$$(13s-5)(s-1)=0$$

$s\neq 1$ より $s=\dfrac{5}{13}$

∴ セ:5 ソ:13

慶早進学塾

問4



$z=s\alpha+t\beta$ が表すのは、以上の領域

0, α, β が表す三角形の面積は、

$\frac{1}{2}\left(7\times\frac{7}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times1-\frac{1}{2}\times2\times7$

$=\frac{7}{2}$

∴求める面積は $(3^2-1^2)\times\frac{7}{2}=28$

∴シ：$\underline{28}$

問5　$P(p,0)$ $Q(q,0)$ として.

$PQ=5$より　$p^2+q^2=25$ …①

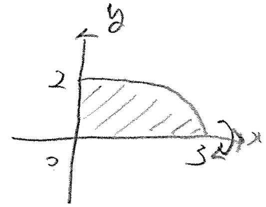
$R\left(\frac{3}{5}p,\ \frac{2}{5}q\right)$

①より　$p=5\cos\theta$, $q=5\sin\theta$ とすると.

Rの軌跡を表すと、

$\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$

これは $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ のだ円である



だ円の面積は、長軸a、短軸bとすると $S=\pi ab$

で表せるので、求める面積は、$\frac{3\times2}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

またその x軸まわりの回転体は $\frac{4}{3}\pi ab^2$ で体積

が表されるので、

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\times3\times2^2=8\pi$

∴ス：3 セ：2 ソ：8

慶早進学塾