慶應義塾大学　総合政策学部　2018.

I. (1) ABRACADABRA と読むには

一番上の A から始めて　の

↙ の方向に5回　↘ の方向に5回

つなげて読めば良い

この方法は　${}_{10}C_5 = 252$ (通り)

(2) 上の読み方のうち，取り除かれた

A を使っていた方法は

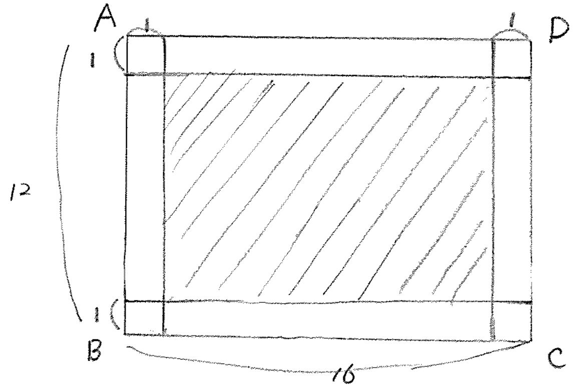
${}_5C_2 \cdot {}_5C_3 = 100$ (通り)

よって A を取り除いた後の読み方の総数は

$252 - 100 = 152$ (通り)

II

(1) 円Oの中心の存在し得る領域は下の斜線部分

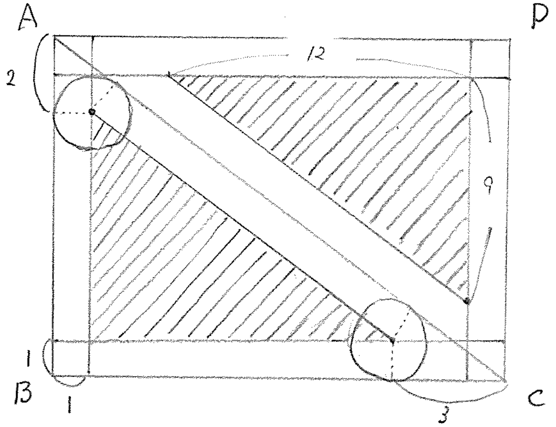


この領域の面積は　$10 \cdot 14 = 140$

(2) 円Oが長方形ABCDの内部に含まれ

かつ ACと共有点をもたないとき

円Oの中心の存在し得る領域は下の斜線部分



(注)

$\angle ACB = \theta$ とすると、$\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

$\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{3}$.

これを用いるなどし、BC, AC に接するときの円Oの中心の位置が分かる

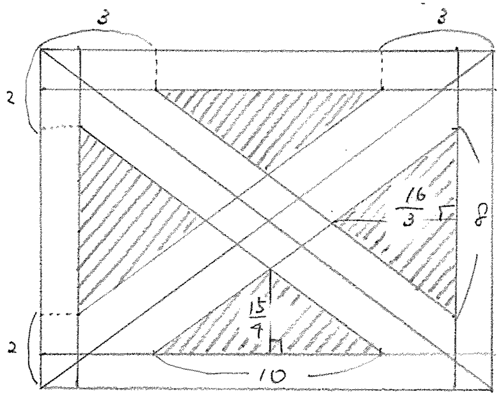
この領域の面積は $2\times\left(\frac{1}{2}\times12\times9\right) = 108$

求める領域は (1) の斜線部から (2) の斜線部を除いた部分である。このため面積は

$$140 - 108 = \underline{32}$$

(3) 円Oが長方形ABCDの内部に含まれ、かつ AC とも BD とも共有点をもたないとき、

円Oの中心の存在し得る領域は下の斜線部分



この面積は $2\times\left(\frac{1}{2}\times10\times\frac{15}{4}\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}\times8\times\frac{16}{3}\right)$

$$= \frac{481}{6}$$

このため

円Oが AC あるいは BD と共有点をもつとき、円Oの中心が存在し得る領域の面積は

$$140 - \frac{481}{6} = \underline{\frac{359}{6}}$$

III

(1) X_1 の期待値は $\frac{5}{8}\times 1+\frac{3}{8}\times 0=\frac{5}{8}$

X_2 の期待値は $\frac{1}{4}\times 1+\frac{3}{4}\times 0=\frac{1}{4}$

2つの確率変数 X_1, X_2 は独立であるため

$m_1=\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\underline{\frac{7}{8}}$

(2) X_1 の分散は $\frac{5}{8}\left(1-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\left(0-\frac{5}{8}\right)^2=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{64}$

X_2 の分散は $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(0-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

X_1, X_2 は独立であるため分散は $\frac{15}{64}+\frac{3}{16}=\underline{\frac{27}{64}}$

(3) S_2 の分散は

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\left(2-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\left(1-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\left(1-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\left(0-\frac{7}{8}\right)^2\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\left(0-\frac{7}{8}\right)^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{64}\times 2+\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\times 2+\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2\right)$

$=\underline{\frac{9}{16}}$

IV

(1) $\begin{cases} x^3-5x^2+ax+3=0 & \text{—①} \\ x^2-x+b=0 & \text{—②} \end{cases}$

が2つの共通解を持つとする。

すなわち、②の任意の解は①の解ともなる

このため x^3-5x^2+ax+3 は x^2-x+b でわりきれる。

ここで、

$x^3-5x^2+ax+3=(x-4)(x^2-x+b)+\{(a-b-4)x+(4b+3)\}$

このため $\begin{cases} a-b-4=0 \\ 4b+3=0 \end{cases}$ $\therefore\ \underline{a=\frac{13}{4},\ b=-\frac{3}{4}}$

とすると①と②が2つの共通解をもつ。

(2) 3次方程式の整数でない有理数解を $x=\frac{m}{n}$

(m, n は互いに素な整数, $n>0$, $n\neq 1$) とする

すると

$3m^3-(a+1)m^2n-4mn^2+an^3=0$

$\therefore\ 3m^3=n\left((a+1)m^2+4mn-an^2\right)$。

ここで m, n は互いに素であったから $n\mid 3$ (← n が3をわりきることを表す)

$n\neq 1$ であるため $n=3$。

このとき $m^3-(a+1)m^2-12m+9a=0$

$\therefore\ (m-3)(m+3)a=m(m-4)(m+3)$

ここで m は n と互いに素であるから、$m \neq \pm 3$

よって $$a = \frac{m(m-4)}{m-3}$$ である。

また、$m-3$ と m、$m-3$ と $m-4$ は互いに素である

このことから $m-3 = \pm 1$、

$a > 0$ であるから $m = 2$、$a = 4$

以上の事から $a = 4$ であり、

このときの整数でない有理数解は $\frac{2}{3}$

V 1桁の数字のうち、1 または素数となるものは

1, 2, 3, 5, 7 の 5個である。

このうち 3でわりきれるものは 1個

3でわった余りが 1 のものは 2個

3でわった余りが 2 のものは 2個 である

まず、条件を満たす n 桁の数は 5^n 個ある。

$$\therefore \quad a_n + b_n + c_n = 5^n$$

また、3でわった余りは、各桁の数の和と等しいことから、

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n + 2c_n$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = -a_n + 2 \cdot 5^n$$

よって $$(-1)^{n+1} a_{n+1} = (-1)^n a_n - 2(-5)^n$$

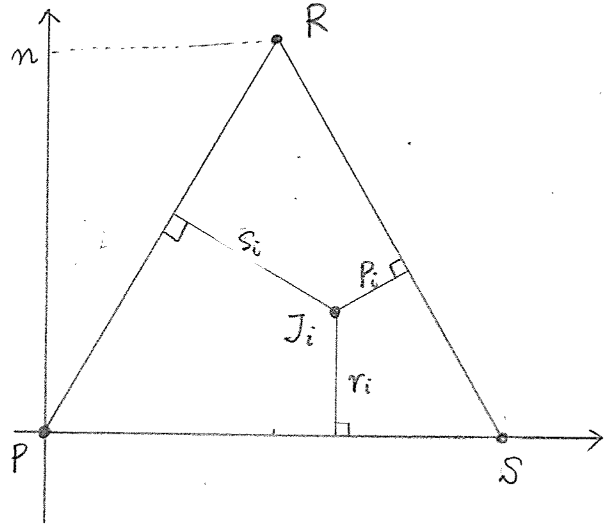
このため一般項は

$$(-1)^n a_n = -a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)(-5)^k$$

$$= \frac{2 + (-5)^n}{3}$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2(-1)^n + 5^n}{3}$$

Ⅵ



(1) 条件から J_i を求めると

$J_i\left(\dfrac{r_i+2s_i}{\sqrt{3}},\ r_i\right)$

(2) $(r_1, s_1, p_1)=(3,2,1)$ で

R対R, S対S, P対R が行われたとすると

$(r_2, s_2, p_2)=(2,2,2)$

$\therefore\ J_2\left(\dfrac{6}{\sqrt{3}},\ 2\right)$

(3) $(r_1, s_1, p_1)=(3,2,1)$,

ジャンケンのペアが R対R, R対S, S対P のとき

$(r_2, s_2, p_2)=(4,2,0)$

この後のジャンケンでは, 2人のSが対戦するとき

状態が変化せず, 2人のSが対戦しないときは

以降 $J_i=R$ となり状態が変化しなくなる.

よって $(r_{16}, s_{16}, p_{16})=(4,2,0)$ となる確率は $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{14}$

$(r_{16}, s_{16}, p_{16})=(6,0,0)$ となる確率は $1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{14}$

このため, $J_{16}=R$ である確率が最も高い

この座標は $\left(\dfrac{6}{\sqrt{3}},\ 6\right)$

(4) 第1ラウンドのジャンケンのペアにより

以下のように場合分けをする

(i) R対R, R対P, S対S のとき

このようになる確率は $\dfrac{1}{5}$ であり

このとき $(r_2, s_2, p_2)=(2,2,2)$,

対称性から この場合は $E(r_{32})$, $E(s_{32})$, $E(p_{32})$

の大小関係に影響しない事が分かる.

(ii) R対R, R対S, S対P のとき

このようになる確率は $\frac{2}{5}$ である.

このとき, $(r_2, s_2, p_2) = (4, 2, 0)$ になる.

この状態における r_{32}, s_{32}, p_{32} の期待値を

$E'(r_{32}), E'(s_{32}), E'(p_{32})$ とすると,

$$E'(r_{32}) = 6 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$$

$$E'(s_{32}) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{30}, \quad E'(p_{32}) = 0$$

(iii) R対S, R対S, R対P のとき

このようになる確率は $\frac{2}{5}$ であり

このとき $(r_2, s_2, p_2) = (4, 0, 2)$ になる

この状態における r_{32}, s_{32}, p_{32} の期待値を

$E''(r_{32}), E''(s_{32}), E''(p_{32})$ とすると

$$E''(p_{32}) = 6 - 2\cdot 30\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{29} - 4\left(\frac{1}{5}\right)^{30}$$

$$E''(r_{32}) = 2\cdot 30\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{29} + 4\left(\frac{1}{5}\right)^{30}, \quad E''(s_{32}) = 0$$

(ii)(iii) より

$$E'(s_{32}) + E''(s_{32}) < E'(p_{32}) + E''(p_{32}) < E'(r_{32}) + E''(r_{32})$$

が言える。 ($E'(s_{32}) < 2 < E''(p_{32}) < E'(r_{32})$ などを利用すると良い)

よって

$$E(r_{32}) > E(p_{32}) > E(s_{32})$$